習題 4-1

1. $f(x)=x^3-3x+6$

解 (1) $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x-1)(x+1)$

(2) f 的臨界數：$f'(x)=3(x-1)(x+1)=0 \quad \therefore x=-1$或$x=1$

(3)分成 3 個區間：$(-\infty,-1)(-1,1)(1,\infty)$

(4)

區間	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
檢查值	-2	0	2
$f'(x)$的符號	+	−	+
結論	遞增	遞減	遞增

2. $f(x)=x^2-5x$

解 (1) $f'(x)=2x-5=2(x-\frac{5}{2})$

(2) f 的臨界數：$f'(x)=2(x-\frac{5}{2})=0 \quad \therefore x=\frac{5}{2}$

(3)分成 2 個區間：$(-\infty,\frac{5}{2})(\frac{5}{2},\infty)$

(4)

區間	$(-\infty,\frac{5}{2})$	$(\frac{5}{2},\infty)$
檢查值	2	3
$f'(x)$的符號	−	+
結論	遞減	遞增

3. $f(x)=x^3-12x+1$

解 (1) $f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)$

(2) f 的臨界數： $f'(x)=3(x-2)(x+2)$ $\therefore x=-2$或$x=2$

(3)分成 3 個區間 $(-\infty,-2)(-2,2)(2,\infty)$

(4)

區間	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
檢查值	-3	0	3
$f'(x)$的符號	$+$	$-$	$+$
結論	遞增	遞減	遞增

4. $f(x)=-2x^2+4x+3$

解 (1) $f'(x)=-4x+4=-4(x-1)$

(2) f 的臨界數： $f'(x)=-4(x-1)=0$ $\therefore x=1$

(3)分成 2 個區間 $(-\infty,1)(1,\infty)$

(4)

區間	$(-\infty,1)$	$(1,\infty)$
檢查值	0	2
$f'(x)$的符號	$+$	$-$
結論	遞增	遞減

5. $f(x)=3x^2-x^3$

解 (1) $f'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)$

(2) f 的臨界數： $f'(x)=3x(2-x)=0 \quad x=0$或$x=2$

(3)分成 3 個區間 $(-\infty,0)(0,2)(2,\infty)$

(4)

區間	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
檢查值	-1	1	3
$f'(x)$的符號	$-$	$+$	$-$
結論	遞減	遞增	遞減

6. $f(x)=x^4+4x^3-7$

解 (1) $f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)$

(2) f 的臨界數： $f'(x)=4x^2(x+3)=0 \quad \therefore x=-3$或$x=0$

(3)分成 3 個區間 $(-\infty-3)(-3,0)(0,\infty)$

(4)

區間	$(-\infty-3)$	$(-3,0)$	$(0,\infty)$
檢查值	-4	-2	1
$f'(x)$的符號	$-$	$+$	$+$
結論	遞減	遞增	遞增

7. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

解 (1) $f'(x)=\dfrac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=\dfrac{(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}$

(2) f 的臨界數： $f'(x)=\dfrac{(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}=0$ $\therefore x=-2$或$x=2$

(3)分成 3 個區間 $(-\infty,-2)(-2,2)(2,\infty)$

(4)

區間	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
檢查值	－3	0	3
$f'(x)$的符號	－	＋	－
結論	遞減	遞增	遞減

8. $f(x)=|x|$

解 (1) $f'(x)=\begin{cases}1 & x>0\\-1 & x<0\end{cases}$

(2) f 的臨界數： $x=0$

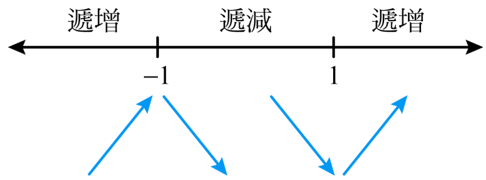
(3)分成兩個區間 $(-\infty,0)(0,\infty)$

區間	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
檢查值	－1	1
$f'(x)$的符號	－	＋
結論	遞減	遞增

習題 4-2

1. $f(x)=x^3-3x+6$

解 (1)由習題 4-1 之第一題解答可知：



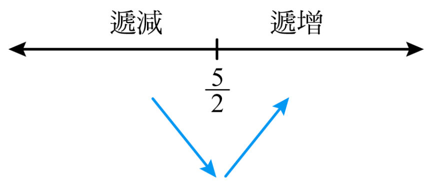
(2)由一階導數判斷法，可得出以結果：

(60) 當 $x=-1$ 時，$f(-1)=8$ 為函數之相對極大值。

(61) 當 $x=1$ 時，$f(1)=4$ 為函數之相對極小值。

2. $f(x)=x^2-5x$

解 (1)由習題 4-1 之第二題解答可知：

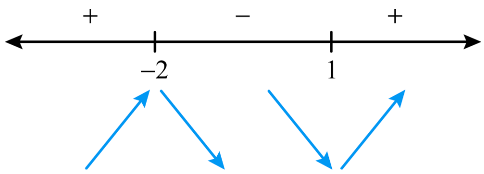


(2)由一階導數判斷法，可得出以結果：

當 $x=\frac{5}{2}$ 時，$f(\frac{5}{2})=\frac{-25}{4}$ 為函數之相對極小值。

3. $f(x)=x^3-12x+1$

解 (1)由習題 4-1 之第 3 題解答可知：



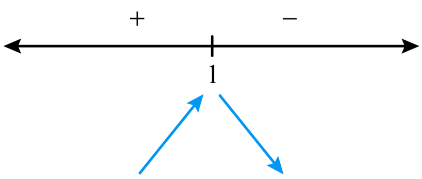
(2)由一階導數判斷法，可得出以結果：

(60)當 $x=-2$時， $f(-2)=17$為函數之相對極大值。

(61)當 $x=2$時， $f(2)=-15$為函數之相對極小值。

4. $f(x)=-2x^2+4x+3$

解 (1)由習題 4-1 之第 4 題解答可知：

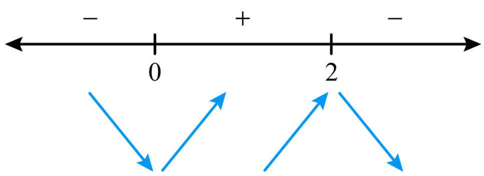


(2)由一階導數判斷法，可得出以結果：

當 $x=1$時， $f(1)=5$為函數之相對極大值。

5. $f(x)=3x^2-x^3$

解 (1)由習題 4-1 之第 5 題解答可知：



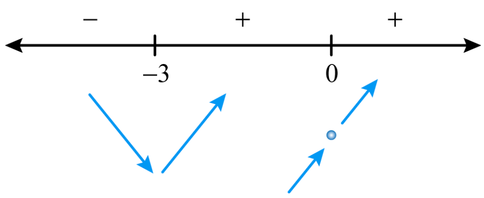
(2)由一階導數判斷法，可得出以結果：

(60) 當 $x=0$ 時，$f(0)=0$ 為函數之相對極小值。

(61) 當 $x=2$ 時，$f(2)=4$ 為函數之相對極大值。

6. $f(x)=x^4+4x^3-7$

解 (1)由習題 4-1 之第 6 題解答可知：



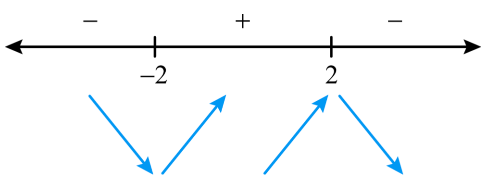
(2)由一階導數判斷法，可得出以結果：

(60) 當 $x=-3$ 時，$f(-3)=-34$ 為函數之相對極小值。

(61) 當 $x=0$ 時，$f(0)=-7$ 不為相對極值。

7. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

解 (1)由習題 4-1 之第 7 題解答可知：



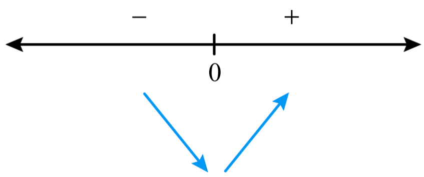
(2)由一階導數判斷法，可得出以結果：

(60) 當 $x=-2$ 時， $f(-2)=\dfrac{-1}{4}$ 為相對極小值。

(61) 當 $x=2$ 時， $f(2)=\dfrac{1}{4}$ 為相對極大值。

8. $f(x)=|x|$

解 (1)由習題 4-1 之第 8 題解答可知：



(2)由一階導數判斷法，可得出以結果：

當 $x=0$ 時， $f(0)=0$ 為相對極小值。

習題 4-3

1. $f(x)=x^3-3x+6$

解 (1)求出 f 之相對極值（二階導數判斷法）

(60) $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

(61) 令 $f'(x)=3(x-1)(x+1)=0$，臨界數 $x=-1$ 或 $x=1$

(62) $f''(x)=6x$

當 $x=-1$ 時，$f''(-1)=-6<0$ $\quad\therefore f(-1)=8$ 為相對極大值。

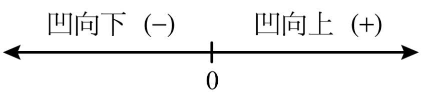
當 $x=1$ 時，$f''(1)=6>0$ $\quad\therefore f(1)=4$ 為相對極小值。

(2)求出 f 之反曲點

(60) $f''(x)=6x$

(61) 令 $f''(x)=6x=0$，解出 $x=0$

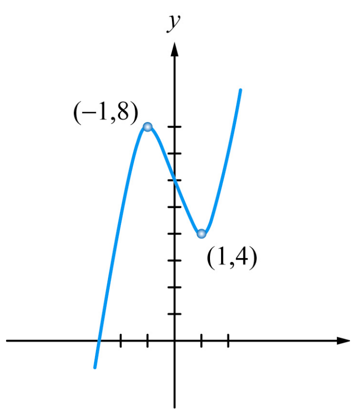
(62) 將數線分成 $(-\infty,0),(0,\infty)$ 兩區間，判斷凹性。



$\therefore x=0$ 時為反曲點，座標為 $(0,6)$

(63) 描繪以下座標，根據相對極值凹性完成圖形。

x	-1	0	1
y	8	6	4



2. $f(x)=x^2-5x$

解 (1)求出 f 之相對極值（二階導數判斷法）

① $f'(x)=2x-5$

②令 $f'(x)=2x-5=0$，臨界數 $x=\frac{5}{2}$

③ $f''(x)=2>0$

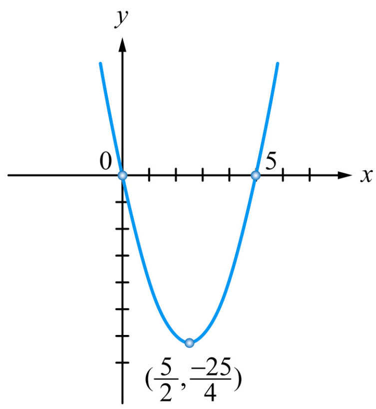
$\therefore$ 當 $x=\frac{5}{2}$ 時，$f(\frac{5}{2})=\frac{-25}{4}$ 為相對極小值。

(2) $\because f''(x)=2>0$

$\therefore f$ 無反曲點

(3) 描繪以下座標，根據相對極值凹性完成圖形。

x	0	5	$\frac{5}{2}$
y	0	0	$\frac{-25}{4}$



3. $f(x)=x^3-12x+1$

解 (1)求出 f 之相對極值（二階導數判斷法）

① $f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)=3(x-2)(x+2)$

②令 $f'(x)=3(x-2)(x+2)=0$，臨界數 $x=-2$ 或 $x=2$

③ $f''(x)=6x$

當 $x=-2$ 時，$f''(-2)=-12<0$ $\quad\therefore f(-2)=17$ 為相對極大值。

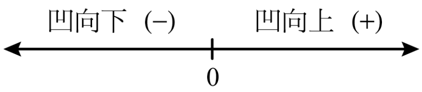
當 $x=2$ 時，$f''(2)=12>0$ $\quad\therefore f(2)=-15$ 為相對極小值。

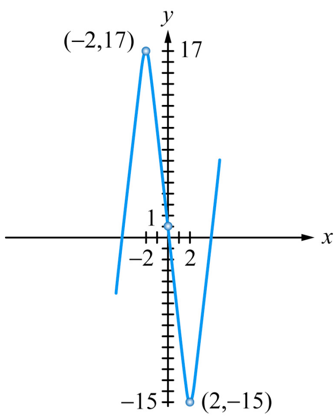
(2)求出 f 之反曲點

① $f''(x)=6x$

②令 $f''(x)=6x=0$，解出 $x=0$

③將數線分成 $(-\infty,0),(0,\infty)$ 兩區間，判斷凹性。





$\therefore\ x=0$ 時為反曲點，反曲點座標為 $(0,1)$

(3)描繪以下座標，根據相對極值凹性完成圖形。

x	-2	2	0
y	17	-15	1

x	1	$1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$	$1-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$
y	5	0	2

4. $f(x)=-2x^2+4x+3$

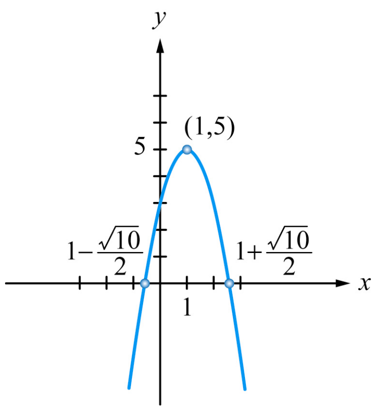
解 (1)求出 f 之相對極值（二階導數判斷法）

① $f'(x)=-4x+4=-4(x-1)$

②令 $f'(x-4)(x-1)=0$，臨界數 $x=1$

③ $f''(x)=-4<0$

$\therefore$ 當 $x=1$ 時，$f(1)=5$ 為相對極大值。



(2) $\because f''(x)=-4<0$

$\therefore f$ 無反曲點

(3)描繪以下座標，根據相對極值凹性完成圖形。

5. $f(x)=3x^2-x^3$

解 (1)求出 f 之相對極值(二階導數判斷法)

① $f'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)$

②令 $f'(x)=3x(2-x)=0$，臨界數 $x=0$或$x=2$

③ $f''(x)=6-6x=6(1-x)$

當 $x=0$時，$f''(0)=6>0$ $\quad\therefore f(0)=0$為相對極小值。

x	0	2	1
y	0	-4	2

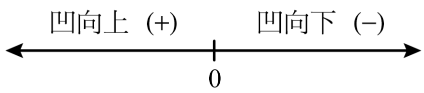
當 $x=2$時，$f''(2)=-6<0$ $\quad\therefore f(2)=4$為相對極大值。

(2)求出 f 之反曲點

① $f''(x)=6-6x=6(1-x)$

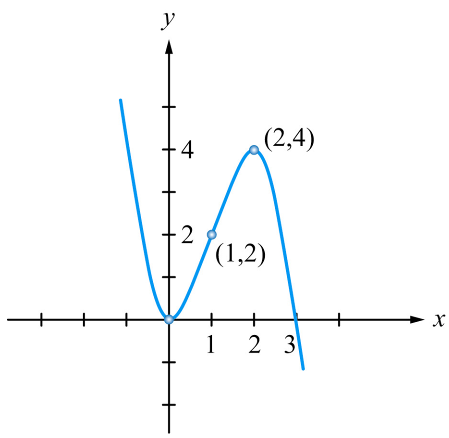
②令 $f''(x)=6(1-x)=0$，解出 $x=1$

③將數線分成 $(-\infty,1),(1,\infty)$ 兩區間，判斷凹性。



$\therefore$ $x=1$時為反曲點，反曲點座標為$(1,2)$

(3)描繪以下座標，根據相對極值凹性完成圖形。



6. $f(x)=x^4+4x^3-7$

解 (1)求出 f 之相對極值（二階導數判斷法）

① $f'(x)=4x^3+12x^2=4x^2(x+3)$

②令 $f'(x)=0$，臨界數 $x=0$或$x=3$

③ $f''(x)=12x^2+24x$

當 $x=0$時，$f''(0)=0$無法判定，改由一階導數判斷法

可知 $f(0)=-7$不為相對極值

當 $x=3$時，$f''(-3)=36>0$ $\quad\therefore f(-3)=-34$為相對極小值。

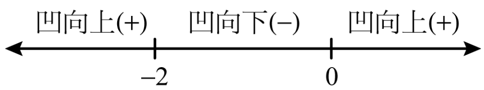
x	-3	-2	0
y	-34	-23	7

(2)求出 f 之反曲點

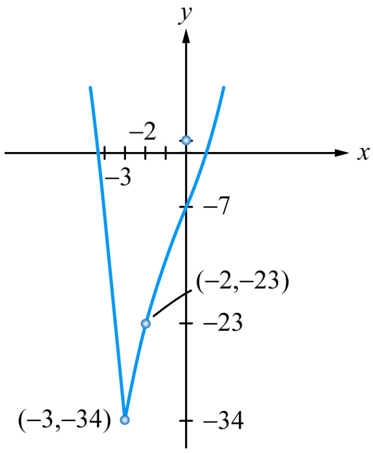
① $f''(x)=12x^2+24x=12x(x+2)$

②令 $f''(x)=12x(x+2)=0$，解出 $x=-2$或$x=0$

③將數線分成 $(-\infty,-2),(-2,0),(0,\infty)$三個區間，判斷凹性。



(3)描繪以下座標，根據相對極值凹性完成圖形。


y
x
−2
−3
−7
(−2,−23)
−23
(−3,−34)
−34

習題 4-4

1. $f(x)=x^2+3$ 在 $[-2,3]$ 處，求絕對極值。

解 (1)先求函數的臨界數

$f'(x)=2x=0 \quad \therefore x=0$ 時 $f(0)=3$ 為臨界數

(2) $f(-2)=7, f(3)=12$

(3)由下表知：f 在 $[-2,3]$ 之絕對極小值是 $f(0)=3$，絕對極大值是 $f(3)=12$

x	$f(x)$	結論
左端點(－2)	7	
臨界數(0)	3	絕對極小值
右端點(3)	12	絕對極大值

2. $f(x)=x^3-6x^2$ 在 $[-1,6]$ 處，求絕對極值。

解 (1)先求函數的臨界數

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)=0 \quad \therefore x=0$ 時 $x=4$ 為臨界數

(2) $f(-1)=-7$，$f(6)=0$

(3)由下表知：f 在 $[-1,6]$ 之絕對極小值是 $f(4)=-32$，絕對極大值是 $f(0)=0$

x	$f(x)$	結論
左端點(－1)	－7	
臨界數(0)	0	絕對極大值
臨界數(4)	－32	絕對極小值
右端點(6)	0	

3. $f(x)=-x^3+12x$ 在 $[-3,5]$ 處，求絕對極值。

解 (1)先求函數的臨界數

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x^2-4)=-3(x-2)(x+2)=0$

所以 $x=-2$ 或 $x=2$ 為臨界數

(2) $f(-3)=-9$ ， $f(5)=-65$

(3)由下表知：f 在 $[-3,5]$ 之絕對極小值是 $f(5)=-65$ ，絕對極大值是 $f(2)=16$

x	$f(x)$	結論
左端點(−3)	−9	
臨界數(−2)	−16	
臨界數(2)	16	絕對極大值
右端點(5)	−65	絕對極小值

4. $f(x)=\lvert x\rvert$ 在 $[-2,5]$ 處，求絕對極值。

解：

(1)函數的臨界數 $x=0$

(2) $f(-2)=2$ ， $f(5)=5$

(3)由下表知：f 在 $[-2,5]$ 之絕對極小值是 $f(0)=0$ ，絕對極大值是 $f(5)=5$

x	$f(x)$	結論
左端點(−2)	2	
臨界數(0)	0	絕對極小值
右端點(5)	5	絕對極大值

習題 4-5

1. 設一矩形的周長為 a，問長、寬各為多少時？有最大的矩行面積。

解 設長為 x，則寬為 $\frac{a}{2}-x$

$A(x)=x(\frac{a}{2}-x)$ 為矩形的面積

(1) 求 $A(x)$ 之臨界數：$A'(x)=-2x+\frac{a}{2}=0$

所以 $x=\frac{a}{4}$ 為 $A(x)$ 之臨界數

(2) 由一階導數判斷法可知：

當 $x=\frac{a}{4}$，$A(x)=\frac{a^2}{16}$ 為矩形之最大面積。

結論：長、寬各為 $\frac{a}{4}$ 時，有最大面積。

2. 已知兩數之和為 54，試問兩數為何時，其乘積為最大？

解 設一數為 x，另一數為 $54-x$

$A(x)=x(54-x)$ 為乘積函數

(1)求 $A(x)$ 之臨界數：$A'(x)=-2x+54=0$

所以 $x=27$ 為 $A(x)$ 之臨界數。

(2)由一階導數判斷法可知：

當 $x=27$ 時， $A(x)=27\cdot 27=729$ 乘積最大。

結論：兩數同為 27 時，可得最大乘積。

3. 求圖形 $y=4-x^2$ 上與 $(0,2)$ 最近之點。

解 設點 A 在 $y=4-x^2$ 上，則 A 之座標應為 $(x,4-x^2)$

A 與 $(0,2)$ 之距離函數： $D(x)=\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}$

求 $D(x)$ 之最小值 $\Leftrightarrow$ 求 $S(x)=(D(x))^2$ 之最小值

求 $S(x)=x^2+(2-x^2)^2$ 之臨界值

(1) $S^1(x)=4x^3-6x=4x(x^2-\frac{3}{2})=0$

$\therefore$ 臨界值 $x=\frac{-\sqrt{6}}{2}$ 或 $x=0$ 或 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)由一階導數判斷法：

可得當 $A=(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{5}{2})$ 與 $(0,2)$ 最接近。

4. 某遊覽公司以 45 座之遊覽車招攬顧客來往三日遊，顧客至少須 35 名方能成行，若顧客恰為 35 名，則每名收費 1000 元，每超過 1 名，減收 20 元，試求招攬多少名顧客，能獲得最大收入。

解 設招攬 $x+35$ 名顧客

則收入函數

$$\begin{aligned}P(x)&=(35+x)(1000-20x)\\&=-20x^2+300x+35000\end{aligned}$$

(1)求 $P(x)$ 之臨界數： $P'(x)=-40x+300=0$

$\therefore x=7.5$ 為臨界數

(2)由一階導數判斷法

當 $x=7.5$時 $P(x)$ 有極大值

(3)$\because x\in N$，$\therefore$當 $x=7$或 8 時

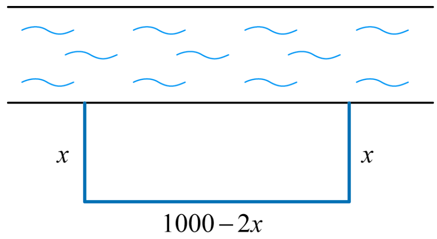
$f(7)=f(8)=31620$

$\therefore$招攬 42 或 43 名顧客，有最大收入 31620。

5. 設某河岸成直線型，岸邊有空地一塊，某人欲用籬笆沿河圍成一長方形之鴨寮。已知籬笆可圍之長度為 100 公尺，問如何圍法可使面積最大。

解

如右圖之圍法，可得長方形面積函數：



$A(x)=x(100-2x)=-2x^2+100x$

欲求 $A(x)$ 之最大值

(1)求 $A(x)$ 之臨界值

$A'(x)=-4x+100$ 令 $A'(x)=-4x+100=0$

$\therefore x=25$為 $A(x)$ 之臨界數

(2)由一階導數判斷法可知：

當 $x=25$時， $A(25)=1250$為最大值

即 1250 為所圍最大面積。

結論：長為 50，寬為 25 的矩形可圍最大面積。

6. 某一產品製造 x 單位的總成本函數 $C(x)=20+4x+\dfrac{x^2}{5}$，問生產量為多少時有最小的平均成本。

解 平均成本函數為

$$AC(x)=\frac{20+4x+\frac{x^2}{5}}{x}=\frac{x}{5}+4+\frac{20}{x}$$

求 $AC(x)$ 之極小值，先求臨界數

$$AC'(x)=\frac{1}{5}-\frac{20}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{5}=\frac{20}{x^2}\Rightarrow x^2=100$$

$$\Rightarrow x=10\text{或}x=-10\text{（不合）}$$

$\therefore x=10$ 為臨界數

當 $x=10$ 時由一階導數判斷法可知

$AC(10)=8$ 為極小值

結論：當產量為 4 單位時，最小平均成本為 8。

7. 某產品之收入函數 $R(x)=12x-\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{18}$，其中 x 是生產的數量，試問可得最大收入的產量為何？

解 求 $R(x)=12x-\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{18}$ 之極大值。

先求出 $R(x)$ 之臨界數

令

$$R'(x)=12-\frac{x}{6}-\frac{x^2}{6}$$
$$=-6(x^2+x-72)$$
$$=-6(x+9)(x-8)=0$$

$\therefore x=8$ 或 $x=-9$（不合）

當 $x=8$ 時，由一階導數判斷法可知

$R(8)=\frac{560}{9}$ 為極大值。

結論：生產 8 個單位時，可得最大收入。

8. 某工廠產品若每週生產 x 件，每件售價 $P=240-2x$，其生產 x 件之總成本函數 $C(x)=1000+30x+x^2$，試求每週生產量為若干時可最大利潤。

解 總收入函數為

$$R(x)=xp=x(240-2x)$$

$$=240x-2x^2$$

利潤函數為

$$P(x)=R(x)-C(x)=(240x-2x^2)-(1000+30x+x^2)$$
$$=-3x^2+210x-1000$$

求 $P(x)$ 之極大值先求臨界數

$$P'(x)=-6x+210=0 \qquad \therefore x=35$$

當 $x=35$ 時，由一階導數判斷法可知 $P(35)=2675$ 為極大值

結論：每週生產 35 單位時，有最大利潤 2675。