習題 3-1

1. 函數 $y=f(x)=x^3$

(1) 求當 x 從 $x=1$ 分別變到 $x=3$、$x=2$、$x=1.1$、$x=1.01$、和 $x=1.001$ 時，函數 $f(x)$ 的平均變化率，並填下表。

解

	$\Delta x=b-a$	$\Delta y=f(b)-f(a)$	$\Delta y/\Delta x$
從 $x=1$ 到 $x=3$	2	26	13
從 $x=1$ 到 $x=2$	1	7	7
從 $x=1$ 到 $x=1.1$	0.1	0.331	3.31
從 $x=1$ 到 $x=1.01$	0.01	0.030301	3.0301
從 $x=1$ 到 $x=1.001$	0.001	0.003003001	3.003001

(2) 求函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 的瞬間變化率。

解 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{b\to 1}\frac{f(b)-f(1)}{b-1}=\lim_{b\to 1}\frac{b^3-1}{b-1}=$$
$$\lim_{b\to 1}\frac{(b-1)(b^2+b+1)}{b-1}=\lim_{b\to 1}(b^2+b+1)=3$$

(3) 若函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的瞬間變化率為 6，則 a 為何？

解 函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 的瞬間變化率為

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{b\to a}\frac{b^3-a^3}{b-a}=$$
$$\lim_{b\to a}\frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{b-a}=\lim_{b\to a}(b^2+ab+a^2)=3a^2$$

$\Rightarrow 3a^2 = 6 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$

(4) 試繪函數 $f(x)$ 的圖形，並比較函數 $f(x)$ 從 $x=1$ 到 $x=2$ 的平均變化率與函數 $f(x)$ 在 $x=1$ 的瞬間變化率。

解 略.

2. 函數 $f(x)=x^2-1$，$P(1,0)$ 為函數圖形上的固定點，$Q(b,f(b))$ 為函數圖形上的動點。

(1) 求 $b=3$、$b=2$、$b=1.5$、和 $b=1.1$ 時，割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的斜率，並填下表。

解

	$b=3$	$b=2$	$b=1.5$	$b=1.1$
$Q(b,f(b))$	(3,8)	(2,3)	(1.5, 1.25)	(1.1, 0.21)
$m_{\sec}$	4	3	2.5	2.1

(2) 求函數 $f(x)$ 在 $P(1,0)$ 點的切線斜率及切線方程式。

解 函數 $f(x)$ 在 $P(1,0)$ 點的切線斜率爲

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{b\to 1}\frac{f(b)-f(1)}{b-1}=\lim_{b\to 1}\frac{(b^2-1)-(1-1)}{b-1}=$$

$$\lim_{b\to 1}\frac{(b-1)(b+1)}{b-1}=\lim_{b\to 1}(b+1)=2$$

函數 $f(x)$ 在 $P(1,0)$ 點的切線方程式爲

$2=\dfrac{y-0}{x-1}$ 或 $y=2x-2$

(3) 試繪函數 $f(x)$ 及在(1)中提及的割線和在(2)中所求切線的圖形，並觀察當動點 Q 沿著曲線往固定點 P 趨近時，割線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與過 P 點切線的關係。

解 略。

3. 假設質點 M 按規律 $f(x)=2x^2+x$ 作直線運動。

(1) 求質點 M 從 $x=3$ 分別到 $x=3.1$、$x=3.01$、$x=3.001$、和 $x=3+\Delta x$ 各時間區間內的平均速度。

解 先求質點 M 從 $x=3$ 到 $x=3+\Delta x$ 的平均速度為

$$\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{(3+\Delta x)-3}=\frac{[2(3+\Delta x)^2+(3+\Delta x)]-[2\cdot 3^2+3]}{\Delta x}$$

$$=\frac{[2(3^2+2\cdot 3\cdot \Delta x+(\Delta x)^2)+(3+\Delta x)]-[2\cdot 3^2+3]}{\Delta x}$$

$$=\frac{[2(2\cdot 3\cdot \Delta x+(\Delta x)^2)+(\Delta x)]}{\Delta x}$$

$$=2(2\cdot 3+\Delta x)+1=13+2\Delta x \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

質點 M 從 $x=3$ 到 $x=3.1$、$x=3.01$、$x=3.001$ 的 Δx 分別為 0.1、0.01、0.001

利用 $(*)$ 式，得

質點 M 從 $x=3$ 到 $x=3.1$、$x=3.01$、$x=3.001$ 的平均速度分別為 13.2、13.02、13.002

(2) 求質點在 $x=3$ 的瞬間速度。

解 利用 $(*)$ 式，得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{(3+\Delta x)-3}=\lim_{\Delta x\to 0}(13+2\Delta x)=13$$

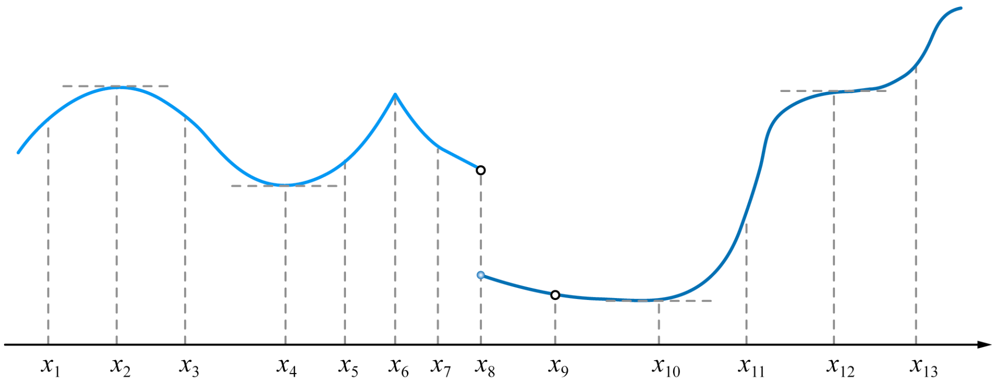
習題 3-2

1. 計算下列函數的導函數、在 $x=1$ 的導數、在各指定切點的切線斜率及切線方程式，完成下表，並繪函數及切線的圖形來驗證答案。

函　　數	$f'(x)$	$f'(1)$	切點	切線斜率	切線方程式
(1) $f(x)=c$，c 為常數	0	0	$(0,c)$	0	$y=c$
(2) $f(x)=x$	1	1	$(2,2)$	1	$y=x$
(3) $f(x)=x^2-1$	$2x$	2	$(2,3)$	4	$y=4x-5$
(4) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$	$-\dfrac{1}{(x+1)^2}$	$-\dfrac{1}{4}$	$(0,1)$	-1	$y=-\dfrac{1}{4}x+1$
(5) $f(x)=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$	$\begin{cases}0, & x\neq 0\\ \text{不存在}, & x=0\end{cases}$	0	$(-1,-1)$	0	$y=-1$

圖形：略。

2. 由下面的函數圖形，判斷在 x_1 至 x_{13} 的 13 個 x 值中，那些 x 的導數為正，那些為負，那些為 0，那些為不存在。



解 導數爲正：x_1, x_5, x_{13}

導數爲 0：x_2, x_4, x_{10}, x_{12}

導數爲負：x_3, x_7, x_{12}

導數爲不存在：x_8, x_9, x_{11}

習題 3-3

1. 證明常數乘法法則。

證明 若 $f(x)$ 是 x 的可微分函數，且 c 為一實數，則

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{c(f(x+h)-f(x))}{h}\\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = cf'(x)\end{aligned}$$

2. 證明減法法則。

證明 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 x 的可微分函數，則

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-g(x+h)]-[f(x)-g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]-[g(x+h)-g(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \frac{d}{dx}f(x)-\frac{d}{dx}g(x)\end{aligned}$$

3. 求下列函數的導數

(1) $f(x)=x-1$

解 $f'(x)=\frac{d}{dx}(x-1)=\frac{d}{dx}x-\frac{d}{dx}1=1-0=1$

(2) $y=x^3+2x+5$

解 $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(x^3+2x+5)=\frac{d}{dx}x^3+\frac{d}{dx}2x+\frac{d}{dx}5=3x^2+2$

(3) $s(t)=\frac{3}{2t^3}$

解 $\frac{d}{dt}s(t)=\frac{d}{dt}\frac{3}{2t^3}=\frac{3}{2}\frac{d}{dt}t^{-3}=\frac{3}{2}(-3)t^{-4}=-\frac{9}{2}t^{-4}$

(4) $y=4t^{\frac{3}{4}}$

解 $\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}4t^{\frac{3}{4}}=4\cdot\frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}=3t^{-\frac{1}{4}}$

(5) $g(x)=3\sqrt[5]{x}$

解 $\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}3x^{\frac{1}{5}}=\frac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

(6) $h(t)=2t^6-5t^2+8\sqrt{t}$

解 $\frac{d}{dt}h(t)=\frac{d}{dt}(2t^6-5t^2+8t^{\frac{1}{2}})=12t^5-10t+4t^{-\frac{1}{2}}$

(7) $m(x)=x(x^3+\frac{1}{x})$

解 $\frac{d}{dx}m(x)=\frac{d}{dx}(x^4+1)=4x^3$

(8) $p(x)=(2x^2-1)(x+2)$

解 $\frac{d}{dx}p(x)=\frac{d}{dx}(2x^3+4x^2-x-2)=6x^2+8x-1$

(9) $q(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$

解 $\frac{d}{dx}q(x)=\frac{d}{dx}\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(10) $r(t)=\frac{2x^3-x^2+1}{x^2}$

解 $\frac{d}{dx}r(x)=\frac{d}{dx}(2x-1+x^{-2})=2-2x^{-3}$

4. 計算下列函數的導函數、在各指定切點的切線斜率及切線方程式及出現水平切線的點，並完成下表。

函　　數	導函數	切點	切線斜率	切線方程式	水平切線的點
(1) $f(x)=x^3-3x+1$	$f'(x)=3x^2-3$	$(0,1)$	-3	$y=-3x+1$	$(1,-1)$, $(-1,3)$
(2) $f(x)=x^4+2x^2+1$	$f'(x)=4x^3+4x$	$(1,4)$	8	$y=8x-4$	$(0,1)$
(3) $f(x)=x^3+3x$	$f'(x)=3x^2+3$	$(-1,-4)$	6	$y=6x+2$	無

5. 試舉例說明，若 $f'(x)=g'(x)$，但不一定 $f(x)=g(x)$。

解 若 $g(x)$ 是 x 的可微分函數，c 爲常數，設 $f(x)=g(x)+c$，則 $f'(x)=g'(x)$，但不一定 $f(x)=g(x)$。

習題 3-4

1. 填空：

(1) $((x^3+2x)(x^2-x))' = (\quad 3x^2+2 \quad)(x^2-x)+(x^3+2x)(\quad 2x-1 \quad)$

(2) $((x^2+1)(x^2+2)(x^2+3))' =$
$(\quad 2x \quad)(x^2+2)(x^2+3)+(x^2+1)(\quad 2x \quad)(x^2+3)+(x^2+1)(x^2+2)(\quad 2x \quad)$

(3) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x^5-2x}{x^3+1} = \dfrac{(\quad 5x^4-2 \quad)(x^3+1)-(x^5-2x)(\quad 3x^2 \quad)}{(\quad x^3+1 \quad)^2}$

(4) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-(\quad 2x \quad)}{(\quad x^2+1 \quad)^4}$

2. 求下列函數的導數：

(1) $y=(x+2)(x^2-1)$

解 解(一)：利用乘法法則

$$\begin{aligned} y' &= ((x+2)(x^2-1))' \\ &= (x+2)'(x^2-1)+(x+2)(x^2-1)' \\ &= (x^2-1)+(x+2)\cdot 2x \\ &= x^2-1+2x^2+4x \\ &= 3x^2+4x-1 \end{aligned}$$

解(二)：乘開後再微分

$$\begin{aligned} y' &= ((x+2)(x^2-1))' \\ &= (x^3+2x^2-x-2)' \\ &= 3x^2+4x-1 \end{aligned}$$

(2) $y=(x^3-2x)(x+1)$

解 解(一)：利用乘法法則

$$y'=((x^3-2x)(x+1))'$$
$$=(x^3-2x)'(x+1)+(x^3-2x)(x+1)'$$
$$=(3x^2-2)(x+1)+(x^3-2x)$$
$$=3x^3+3x^2-2x-2+x^3-2x$$
$$=4x^3+3x^2-4x-2$$

解(二)：乘開後再微分

$$y'=((x^3-2x)(x+1))'$$
$$=(x^4+x^3-2x^2-2x)'$$
$$=4x^3+3x^2-4x-2$$

(3) $y=x^3(x+1)$

解 解(一)：利用乘法法則

$$y'=(x^3(x+1))'$$
$$=(x^3)'(x+1)+(x^3)(x+1)'$$
$$=(3x^2)(x+1)+(x^3)$$
$$=3x^3+3x^2+x^3$$
$$=4x^3+3x^2$$

解(二)：乘開後再微分

$$y'=(x^3(x+1))'$$
$$=(x^4+x^3)'$$
$$=4x^3+3x^2$$

(4) $y=\sqrt{x}(x+1)$

解(一)：利用乘法法則

$$y'=(\sqrt{x}(x+1))'$$
$$=(x^{\frac{1}{2}})'(x+1)+(x^{\frac{1}{2}})(x+1)'$$
$$=(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})(x+1)+(x^{\frac{1}{2}})$$
$$=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

解(二)：乘開後再微分

$$y'=(\sqrt{x}(x+1))'$$
$$=(x^{\frac{1}{2}}(x+1))'$$
$$=(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})'$$
$$=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

(5) $y=(x+1)^2$

解(一)：利用乘法法則

$$y'=((x+1)(x+1))'$$
$$=(x+1)'(x+1)+(x+1)(x+1)'$$
$$=1\cdot(x+1)+(x+1)\cdot 1$$
$$=2x+2$$

解(二)：乘開後再微分

$$y' = ((x+1)^2)'$$
$$= (x^2+2x+1)'$$
$$= 2x+2$$

(6) $y=(x+1)^3$

解

解(一)：利用乘法法則

$$y' = ((x+1)(x+1)(x+1))'$$
$$= (x+1)'(x+1)(x+1)+(x+1)(x+1)'(x+1)+(x+1)(x+1)(x+1)'$$
$$= 1\cdot(x+1)(x+1)+(x+1)\cdot 1\cdot(x+1)+(x+1)(x+1)\cdot 1$$
$$= 3(x+1)^2$$
$$= 3(x^2+2x+1)$$
$$= 3x^2+6x+3$$

解(二)：乘開後再微分

$$y' = ((x+1)^3)'$$
$$= (x^3+3x^2+3x+1)'$$
$$= 3x^2+6x+3$$

3. 求下列函數的導數：

(1) $y=\dfrac{x+2}{x+1}$

解 利用除法法則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{x+2}{x+1}$$
$$=\frac{(x+2)'(x+1)-(x+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{1\cdot(x+1)-(x+2)\cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

(2) $y=\dfrac{x^2+2}{x+1}$

解 利用除法法則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{x^2+2}{x+1}$$
$$=\frac{(x^2+2)'(x+1)-(x^2+2)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{2x\cdot(x+1)-(x^2+2)\cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$$

(3) $y=\dfrac{(x+2)^2}{x+1}$

解 利用除法法則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{(x+2)^2}{x+1}$$
$$=\frac{((x+2)^2)'(x+1)-(x+2)^2(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(2x+4)\cdot(x+1)-(x^2+4x+4)\cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

(4) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$

解 利用除法法則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2+1}$$
$$=\frac{(1)'(x^2+1)-(1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

(5) $y=\dfrac{(x+2)^2}{x}$

解 解(一)：利用除法法則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{(x+2)^2}{x}$$
$$=\frac{((x+2)^2)'\cdot x-(x+2)^2\cdot(x)'}{x^2}$$
$$=\frac{(2x+4)\cdot x-(x^2+4x+4)\cdot 1}{x^2}$$
$$=\frac{x^2-4}{x^2}$$
$$=1-\frac{4}{x^2}$$

解(二)：化簡後再微分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{(x+2)^2}{x}$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{x^2+4x+4}{x}$$
$$=\frac{d}{dx}(x+4+\underbrace{\frac{4}{x}}_{4x^{-1}})$$
$$=1-\frac{4}{x^2}$$

(6) $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$

解 解(一)：利用除法法則

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$$
$$=\frac{(x^2+4x+3)'(x+1)-(x^2+4x+3)(x+1)'}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{(2x+4)\cdot(x+1)-(x^2+4x+3)\cdot 1}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}$$
$$=1$$

解(二)：化簡後再微分

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{(x+2)^2-1}{(x+1)}$$
$$=\frac{d}{dx}\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)}$$
$$=\frac{d}{dx}(x+3)$$
$$=1$$

4. 假設 $f(x)$ 為可微分函數

(a) 利用乘法法則

$$\frac{d}{dx}(f(x))^2=\frac{d}{dx}(f(x)f(x))=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)$$
$$=f(x)f'(x)+f(x)f'(x)=2f(x)f'(x)$$

(b) 利用乘法法則和(a)

$$\frac{d}{dx}(f(x))^3 = \frac{d}{dx}((f(x))^2 f(x))$$
$$= (\frac{d}{dx}(f(x))^2) f(x) + (f(x))^2 \frac{d}{dx} f(x)$$
$$= (2f(x)f'(x))f(x) + (f(x))^2 f'(x)$$
$$= 2(f(x))^2 f'(x) + (f(x))^2 f'(x)$$
$$= 3(f(x))^2 f'(x)$$

(1) 試利用乘法法則和(b)，求 $\frac{d}{dx}(f(x))^4$ 。

解 $$\frac{d}{dx}(f(x))^4 = \frac{d}{dx}((f(x))^3 f(x))$$
$$= (\frac{d}{dx}(f(x))^3) f(x) + (f(x))^3 \frac{d}{dx} f(x)$$
$$= (3f(x)^2 f'(x))f(x) + (f(x))^3 f'(x)$$
$$= 3(f(x))^3 f'(x) + (f(x))^3 f'(x)$$
$$= 4(f(x))^3 f'(x)$$

(2) 是否有看出 $\frac{d}{dx}(f(x))^2$ ，$\frac{d}{dx}(f(x))^3$ ，和 $\frac{d}{dx}(f(x))^4$ 的規則，試推測 $\frac{d}{dx}(f(x))^5$ 和 $\frac{d}{dx}(f(x))^n$ ，n 爲正整數。

解 $$\frac{d}{dx}(f(x))^5 = 5(f(x))^4 f'(x)$$
$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} f'(x)$$

習題 3-5

1. 填空：

(1) $\dfrac{d}{dx}(x^2+x)^{10}=(\quad 10(2x+1) \quad)(x^2+x)^{(\quad 9 \quad)}$

(2) $\dfrac{d}{dx}\sqrt[3]{(x^2+x)^2}=\dfrac{d}{dx}(x^2+x)^{(\quad \frac{2}{3} \quad)}=(\quad \dfrac{2}{3}(2x+1) \quad)(x^2+x)^{(\quad \frac{1}{2} \quad)}$

(3) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{d}{dx}(x^2+x)^{(\quad -1 \quad)}=(\quad -(2x+1) \quad)(x^2+x)^{(\quad -2 \quad)}$

(4) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}=\dfrac{d}{dx}(x^2+x)^{(\quad -\frac{1}{2} \quad)}=(\quad -\dfrac{1}{2}(2x+1) \quad)(x^2+x)^{(\quad -\frac{3}{2} \quad)}$

(5) $\dfrac{d}{dx}((x^3-1)^5(x^2-x))=(\quad 15x^2(x^3-1)^4 \quad)(x^2-x)+(x^3-1)^5(\quad 2x-1 \quad)$

(6) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{(\quad 1 \quad)\sqrt{x+1}-(x-1)(\quad \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} \quad)}{(\quad x+1 \quad)}$

2. 求下列函數的導數：

(1) $\dfrac{d}{dx}(3x^2-x+1)^2=2(3x^2-x+1)(6x-1)$

(2) $\dfrac{d}{dx}(3x^2-x+1)^{10}=10(3x^2-x+1)^9(6x-1)$

(3) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{3x^2-x+1}=\dfrac{d}{dx}(3x^2-x+1)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}(3x^2-x+1)^{-\frac{1}{2}}(6x-1)$

(4) $\dfrac{d}{dx}\sqrt{(3x^2-x+1)^5}=\dfrac{d}{dx}(3x^2-x+1)^{\frac{5}{2}}=\dfrac{5}{2}(3x^2-x+1)^{\frac{3}{2}}(6x-1)$

(5) $\frac{d}{dx}\frac{1}{3x^2-x+1}=\frac{d}{dx}(3x^2-x+1)^{-1}=-(3x^2-x+1)^{-2}(6x-1)$

(6) $\frac{d}{dx}\frac{1}{(3x^2-x+1)^5}=\frac{d}{dx}(3x^2-x+1)^{-5}=-5(3x^2-x+1)^{-6}(6x-1)$

(7) $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt[3]{(3x^2-x+1)^5}}=\frac{d}{dx}(3x^2-x+1)^{-\frac{5}{3}}=-\frac{5}{3}(3x^2-x+1)^{-\frac{8}{3}}(6x-1)$

(8)

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x-1}(x^2+1))$$
$$=((x-1)^{\frac{1}{2}})'(x^2+1)+(x-1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)'$$
$$=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(x^2+1)+(x-1)^{\frac{1}{2}}(2x)$$
$$=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}[(x^2+1)+\underbrace{(2(x-1)^{\frac{1}{2}})(x-1)^{\frac{1}{2}}(2x)}_{4x(x-1)}]$$
$$=\frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(5x^2-4x+1)$$

(9)

$$\frac{d}{dx}(x(x^2+1)^{10})=(x)'(x^2+1)^{10}+x\underbrace{((x^2+1)^{10})'}_{10(x^2+1)^9\cdot 2x}$$
$$=(x^2+1)^{10}+20x^2(x^2+1)^9=(x^2+1)^9(21x^2+1)$$

(10)

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2+2}{\sqrt{x+1}}=\frac{\overbrace{(x^2+2)'}^{2x}(x+1)^{\frac{1}{2}}-(x^2+2)\overbrace{((x+1)^{\frac{1}{2}})'}^{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}}{x+1}$$
$$=2x(x+1)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(x^2+2)(x+1)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}[2x(x+1)^{-\frac{1}{2}}(2(x+1)^{\frac{3}{2}})-(x^2+2)]$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}[4x(x+1)-(x^2+2)]$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}(3x^2+4x-2)$$

(11) $\frac{d}{dx}(\frac{x^2+2}{x+1})^5 = 5(\frac{x^2+2}{x+1})^4 \frac{d}{dx}\frac{x^2+2}{x+1}$

$= 5(\frac{x^2+2}{x+1})^4 \frac{\overbrace{(x^2+2)'}^{2x}(x+1)-(x^2+2)\overbrace{(x+1)'}^{1}}{(x+1)^2}$

$= 5(\frac{x^2+2}{x+1})^4 \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2} = \frac{5(x^2+2)^4(x^2+2x-2)}{(x+1)^3}$

(12) $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2+2}{x+1}} = \frac{1}{2}(\frac{x^2+2}{x+1})^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}\frac{x^2+2}{x+1}$

$= \frac{1}{2}(\frac{x^2+2}{x+1})^{-\frac{1}{2}} \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$

$= \frac{(x^2+2)^{-\frac{1}{2}}(x^2+2x-2)}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$

3. 試分別利用(a)乘法法則，(b)乘開後再微分，(c)一般冪次方法則，求 $\frac{d}{dx}(x^2+1)^2$。

解 (a) 乘法法則：$\frac{d}{dx}(x^2+1)^2 = \frac{d}{dx}((x^2+1)(x^2+1))$

$= \overbrace{(x^2+1)'}^{2x}(x^2+1)+(x^2+1)\overbrace{(x^2+1)'}^{2x} = 4x(x^2+1)$

(b) 乘開後再微分：$\frac{d}{dx}(x^2+1)^2 = \frac{d}{dx}(x^4+2x^2+1) = 4x^3+4x = 4x(x^2+1)$

一般冪次方法則：$\frac{d}{dx}(x^2+1)^2 = 2(x^2+1)\overbrace{(x^2+1)'}^{2x} = 4x(x^2+1)$

4. 試利用一般冪次方法則和乘法法則證明除法法則，即

解

$$\frac{d}{dx}[\frac{f(x)}{g(x)}]=\frac{d}{dx}[f(x)\frac{1}{g(x)}]=\frac{d}{dx}[f(x)(g(x))^{-1}]$$

$$=\underbrace{(f(x))'}_{f'(x)}(g(x))^{-1}+f(x)\underbrace{((g(x))^{-1})'}_{-(g(x))^{-2}g'(x)}$$

$$=\frac{f'(x)}{g(x)}-\frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

習題 3-6

1. 填空：

	函數	一階導數	二階導數	三階導數	指定導數的值
(1)	$f(x)=x^3+2x-1$	$f'(x)=3x^2+2$	$f''(x)=6x$	$f'''(x)=6$	$f''(3)=18$
(2)	$g(t)=(x+2)^2$	$g'(t)=2(x+2)$	$g''(t)=2$	$g'''(t)=0$	$g'(3)=10$
(3)	$h(x)=x^2(x^3+2x-1)$	$h'(x)=5x^4+6x^2-2x$	$h''(x)=20x^3+12x-2$	$h'''(x)=60x^2+12$	$h'''(1)=72$
(4)	$y=\sqrt{x^2+1}$	$y'=x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$	$y''=(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}$	$y'''=-3x(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}$	$y''\|_{x=1}=\frac{\sqrt{2}}{4}$
(5)	$y=\frac{1}{2x+1}$	$y'=-2(2x+1)^{-2}$	$y''=8(2x+1)^{-3}$	$y'''=-48(2x+1)^{-4}$	$y'''\|_{x=0}=-48$

2. 求下列函數 n 階導數的通式：

函數	(1) $f(x)=x^4-x^2+1$	(2) $f(x)=\frac{1}{x^3}$	(3) $y=x\cdot g(x)$
一階導數	$f'(x)=4x^3-2x$	$f'(x)=-3x^{-4}$	$y'=g(x)+xg'(x)$
二階導數	$f''(x)=12x^2-2$	$f''(x)=(-3)(-4)x^{-5}$	$y''=2g'(x)+xg''(x)$
三階導數	$f'''(x)=24x$	$f'''(x)=(-3)(-4)(-5)x^{-6}$	$y'''=3g''(x)+xg'''(x)$
四階導數	$f^{(4)}(x)=24$	$f^{(4)}(x)=(-3)(-4)(-5)(-6)x^{-7}$	$y^{(4)}=4g'''(x)+xg^{(4)}(x)$
五階導數	$f^{(5)}(x)=0$	$f^{(5)}(x)=(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)x^{-8}$	$y^{(5)}=5g^{(4)}(x)+xg^{(5)}(x)$
N 階導數，$n\geq 6$	$f^{(n)}(x)=0$	$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n+2)!x^{-(n+3)}}{2}$	$y^{(n)}=ng^{(n-1)}(x)+xg^{(n)}(x)$

3. 求下列函數的二階導數：

(1) $f(x)=x(x^2-1)=x^3-x$

解 $f'(x)=3x^2-1$

$f''(x)=6x$

(2) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x}=x^2+1$

解 $f'(x)=2x$

$f''(x)=2$

(3) $f(x)=\sqrt{x}(x^2-1)=x^{\frac{5}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$

解 $f'(x)=\dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x)=\dfrac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

(4) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x+1}$

解 $$f'(x)=(\frac{x^3+x}{x+1})'=\frac{\overbrace{(x^3+x)'}^{3x^2+1}(x+1)-(x^3+x)\overbrace{(x+1)'}^{1}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\overbrace{(x^3+x)'}^{3x^2+1}(x+1)-(x^3+x)\overbrace{(x+1)'}^{1}}{(x+1)^2}=\frac{2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{2x^3+3x^2+1}{(x+1)^2}\right)'=\frac{\overbrace{(2x^3+3x^2+1)'}^{6x^2+6x}(x+1)^2-(2x^3+3x^2+1)\overbrace{((x+1)^2)'}^{2(x+1)}}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{2x^3+6x^2+6x-2}{(x+1)^4}$$

(5) $f(x)=\sqrt{x+1}(x^2-1)=(x+1)^{\frac{1}{2}}(x^2-1)$

解 $f'(x)=\overbrace{((x+1)^{\frac{1}{2}})'}^{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}(x^2-1)+(x+1)^{\frac{1}{2}}\overbrace{(x^2-1)'}^{2x}$

$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}[(x^2-1)+\overbrace{(2(x+1)^{\frac{1}{2}})(2x(x+1)^{\frac{1}{2}})}^{4x(x+1)}]$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(5x^2+4x-1)$$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\overbrace{((x+1)^{-\frac{1}{2}})'}^{-\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{3}{2}}}(5x^2+4x-1)+\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\overbrace{(5x^2+4x-1)'}^{10x+4}$$

$$=-\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}[(5x^2+4x-1)+\underbrace{(-4(x+1)^{\frac{3}{2}})\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(10x+4)}_{-2(x+1)(10x+4)}]$$

$$=\frac{1}{4}(x+1)^{-\frac{3}{2}}(15x^2+24x+9)$$

(6) $f(x)=(x^3+x)^5$

解 $f'(x)=5(x^3+x)^4(3x^2+1)$

$$f''(x)=5[\underbrace{((x^3+x)^4)'}_{4(x^3+x)^3(3x^2+1)}(3x^2+1)+(x^3+x)^4\underbrace{(3x^2+1)'}_{6x}]$$

$$=10(x^3+x)^3[2(3x^2+1)^2+3x(x^3+x)]$$

$$=10(x^3+x)^3(21x^4+15x^2+2)$$

習題 3-7

1. 以隱函數微分求 dy/dx，並求導數在各點的值：

函　數	dy/dx	點	dy/dx 在點的值
(1) $y^3=x$	$\frac{d}{dx}y^3=\frac{d}{dx}x$ $\Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx}=1$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2}$	$(1,1)$	$\frac{dy}{dx}\Big\|_{(1,1)}=\frac{1}{3}$
(2) $x^2+y^3=2$	$\frac{d}{dx}(x^2+y^3)=\frac{d}{dx}2$ $\Rightarrow 2x+3y^2\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{3y^2}$	$(-1,1)$	$\frac{dy}{dx}\Big\|_{(-1,1)}=\frac{2}{3}$
(3) $x^2y+y^3=1$	$\frac{d}{dx}(x^2y+y^3)=\frac{d}{dx}1$ $\Rightarrow (2xy+x^2\frac{dy}{dx})+3y^2\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-2xy}{x^2+3y^2}$	$(0,1)$	$\frac{dy}{dx}\Big\|_{(0,1)}=0$

(4) $x^2y+y^3+x^2=1$	$\frac{d}{dx}(x^2y+y^3+x^2)=\frac{d}{dx}1$ $\Rightarrow(2xy+x^2\frac{dy}{dx})+3y^2\frac{dy}{dx}+2x=0$ $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy-2x}{x^2+3y^2}$	$(0,1)$	$\frac{dy}{dx}\|_{(0,1)}=0$
(5) $\frac{x+y}{x-y}=1$	(解一：隱函數微分) $\frac{d}{dx}(\frac{x+y}{x-y})=\frac{d}{dx}1$ $\Rightarrow\frac{\overbrace{(x+y)'}^{1+\frac{dy}{dx}}(x-y)-(x+y)\overbrace{(x-y)'}^{1-\frac{dy}{dx}}}{(x-y)^2}=0$ $\Rightarrow(1+\frac{dy}{dx})(x-y)-(x+y)(1-\frac{dy}{dx})=0$ $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ (解二：顯函數微分) $\frac{x+y}{x-y}=1$ $\Rightarrow x+y=x-y$ $\Rightarrow 2y=0$ $\Rightarrow y=0$ $\Rightarrow\frac{dy}{dx}=0$ 註：試解釋(解一)和(解二)的解相同。	$(1,0)$	$\frac{dy}{dx}\|_{(1,0)}=0$

(6) $(x-y)^3=1$	(解一：隱函數微分) $\frac{d}{dx}(x-y)^3=\frac{d}{dx}1$ $\Rightarrow 3(x-y)^2\underbrace{\frac{d}{dx}(x-y)}_{1-\frac{dy}{dx}}=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$ (解二：顯函數微分) $(x-y)^3=1$ $\Rightarrow x-y=1$ $\Rightarrow y=x-1$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1$	$(0,-1)$	$\frac{dy}{dx}\vert_{(0,-1)}=1$

2. 以隱函數微分求 dy/dx，並求函數圖形在各點的斜率及切線方程式：

函　　數	dy/dx	點	斜率	切線方程式
(1) $x^2+y^2=5$	$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}5$ $\Rightarrow 2x+2y\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$	$(1,2)$	$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}$	$y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$
(2) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=1$	$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})=\frac{d}{dx}1$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{xy}}{x}$	$(1,1)$	$\frac{dy}{dx}=-1$	$y=-x+2$

(3) $3x^2-2y+5=0$	$\frac{d}{dx}(3x^2-2y+5)=\frac{d}{dx}0$ $\Rightarrow 6x-2\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=3x$	$(1,4)$	$\frac{dy}{dx}=3$	$y=3x+1$
(4) $4x^2+9y^2=1$	$\frac{d}{dx}(4x^2+9y^2)=\frac{d}{dx}1$ $\Rightarrow 8x+18y\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{dy}{dx}=0$	$y=\frac{1}{3}$
(5) $y^2-x=5$	$\frac{d}{dx}(y^2-x)=\frac{d}{dx}5$ $\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}-1=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y}$	$(4,3)$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{6}$	$y=\frac{1}{6}x+\frac{7}{3}$
(6) $x^3-y^3=1$	$\frac{d}{dx}(x^3-y^3)=\frac{d}{dx}1$ $\Rightarrow 3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}=0$ $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^2}$	$(0,-1)$	$\frac{dy}{dx}=0$	$y=-1$