習題 2-1

1. 若 $f(x)=x^2-3x+2$，試求 $f(-2)$。

解 $f(-2)=(-2)^2-3(-2)+2$

$=4+6+2$

$=12$

2. 若 $f(x)=x^2-1$，試求

(1) $f(x+\Delta x)$

解 $f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2-1$

$=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-1$

(2) $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

解 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{(x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-1)-(x^2-1)}{\Delta x}$

$=\dfrac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}$

$=2x+\Delta x$

3. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ 的定義域。

解 因分母 $x^2-1\neq 0$

故定義域為 $D_f=\{x|x\neq \pm 1\}$

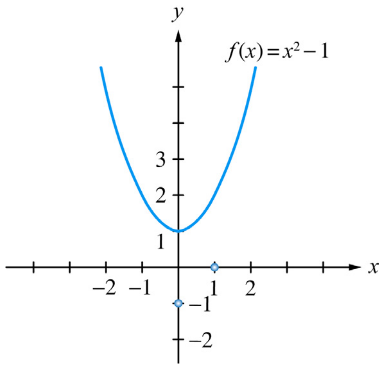
4. 求 $f(x)=\dfrac{3x+1}{(x+4)(x-2)}$ 。

解 因分母 $(x+4)(x-2)\neq 0$

故定義域為 $D_f=\{x|x\neq -4, x\neq 2\}$

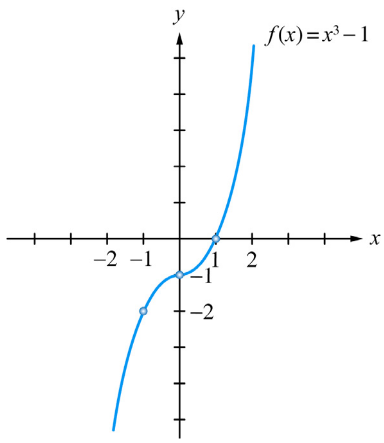
5. 試繪 $f(x)=x^2+1$ 的圖形。

解 $f(x)=x^2+1$



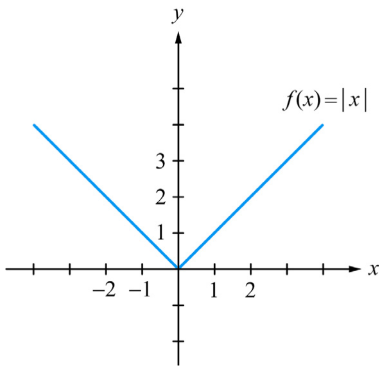
6. 試繪 $f(x)=x^3-1$ 的圖形。

解 $f(x)=x^3-1$



7. 試繪 $f(x)=1\times 1$ 的圖形。

解 $f(x)=|x|$



8. 若 $f(x)=\sqrt{x}$ ， $g(x)=1-x^2$ ，試求 $f+g$ 、 $f-g$ 、 $f\cdot g$ 及 $\dfrac{f}{g}$ 。

解

$$f(x)+g(x)=\sqrt{x}+(1-x^2)$$

$$f(x)-g(x)=\sqrt{x}-(1-x^2)$$

$$f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x}-(1-x^2)$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{1-x^2}$$

9. 若 $f(x)=\dfrac{x-2}{3}$ ， $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ ，試求 $f+g$ 、 $f-g$ 、 $f\cdot g$ 及 $\dfrac{f}{g}$ 。

解

$$f(x)+g(x)=\frac{x-2}{3}+\sqrt{1-x^2}$$

$$f(x)-g(x)=\frac{x-2}{3}-\sqrt{1-x^2}$$

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{x-2}{3}\cdot\sqrt{1-x^2}=\frac{(x+2)\sqrt{1-x^2}}{3}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x+2}{3\sqrt{1-x^2}}$$

10. 設 $f(x)=x^2$，且 $g(x)=\dfrac{1}{x+3}$。

(1) 試求 $f[g(x)]$

解 $f[g(x)]=f\left[\dfrac{1}{x+3}\right]=\left(\dfrac{1}{x+3}\right)^2$

(2) $f[g(2)]$

解 $f[g(2)]=f\left[\dfrac{1}{2+3}\right]=f\left[\dfrac{1}{5})\right]=\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=\dfrac{1}{25}$

11. 設 $f(x)=x-3$， $g(x)=x^2+1$，試求 $f[g(x)]$與 $g[f(x)]$。

解 $f[g(x)]=f[x^2+1]=(x^2+1)-3=x^2-2$

$g[f(x)]=g[x-3]=(x-3)^2+1=x^2-6x+9+1=x^2-6x+10$

習題 2-2

1. 求下列的極限

(1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x^2+6)$

解 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x^2+6)=4+8+6=18$

(2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2+4x-3}$

解 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x^2-4x-3}=\dfrac{-3}{1+4-3}=-\dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+4}{x-7}$

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+4}{x-7}=-\dfrac{8}{5}$

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-10x}{x-2}$

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-10x}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x+5)=7$

(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$

解 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

解 $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(7) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1})$

解 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right)$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-3}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{x^2+x+1}=1$

(8) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-x+1}$

解 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$

(9) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+x}$

解 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x}+x=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}=1$

(10) $\lim\limits_{x\to1}\frac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1}$

解 $\lim\limits_{x\to1}\frac{4-\sqrt{x+15}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{16-(x+15)}{(x+1)(x-1)(4+\sqrt{x+15})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-x+1}{(x+1)(x-1)(4+\sqrt{x+15})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{-1}{(x-1)(4+\sqrt{x+15})}=0$

2. 求下列函數的漸近線

(1) $f(x)=x^3-4x+5$

解 多項式函數垂直及水平漸近線

(2) $f(x)=\frac{1}{(x-3)(x+5)}$

解 有理函數分母為 0 之處有垂直漸近線為 $x=3$，$x=-5$

即 $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to3^+}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to5^+}f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to5^-}f(x)=-\infty$

水平漸近線爲 $y=0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

(3) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$。

解 因 $1+x^2\neq0$　故無垂直漸近線為 $x=0$

水平漸近線爲 $y=0$

因為 $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$，$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2}=0$

(4) $f(x)=\frac{2x}{x^2+6x+8}$ 。

解 垂直漸近線 $x=-4$，及 $x=-2$

即 $\lim_{x\to-4^-}f(x)=-\infty$ ，$\lim_{x\to-4^+}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to-2^-}f(x)=-\infty$ ，$\lim_{x\to-2^+}f(x)=-\infty$

水平漸近線為 $y=0$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ ，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

(5) $f(x)=\frac{2x^2+5}{x^2-2}$ 。

解

垂直漸近線 $x=\sqrt{2}$

即 $\lim_{x\to\sqrt{2}^+}f(x)=-\infty$

水平漸近線為 $y=2$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=2$ ，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

3. 判定下列各函數在所給的點 c 是否連續

(1) $f(x)=2x^3-3x^2+5$ ，$c=3$ 。

解 $\lim_{x\to3}f(x)=22=f(3)$

解多項式函數 $c=3$ 為連續性。

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$c=2$。

解 為有理函數　故 $c=2$ 為連續性。

(3) $g(x)=\sqrt{x^3-8}$，$c=2$。

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=0=f(2)$$

故 $c=2$ 為連續性。

(4) $h(x)=\begin{cases} x+1 & 當x\le 0 \\ x^2+1 & 當x>0 \end{cases}$，$c=0$。

$$\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1，\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x+1)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)$$ 故極限存在

$$\lim_{x\to 0} h(x)=h(0)=1$$

故在 $c=0$　為連續性。

(5) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{2-x} & 當x<2 \\ x-2 & 當x\ge 2 \end{cases}$，$c=2$　。

$$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}=0，\lim_{x\to 2^+} x-2=0$$

$$\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}=\lim_{x\to 2^+}(x-2)$$　故極限存在

$$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=0$$

故 $c=2$ 為連續性