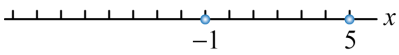
習題 1-1

1. 繪出下列各集合的圖形

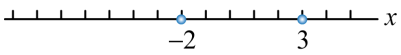
(1)$[-1, 5]$

解 $[-1,5]=\{x|-1\le x\le 5\}$



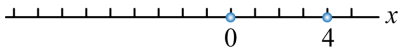
(2)$[-2, 3]$

解 $[-2,3]=\{x|-2\le x\le 3\}$



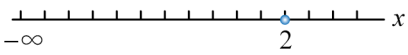
(3)$(0, 4)$

解 $(0,4)=\{x|0<x<4\}$



(4)$(-\infty, 2)$

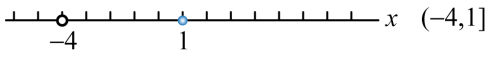
解 $(-\infty,2)=\{x|-\infty<x<2\}$

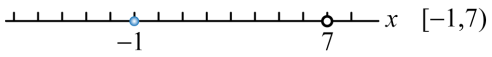


2. 設 $A=(-4, 1)$，$B=[-1, 7]$，$C=(-1, \infty)$，求

(1) $A\cap B$

解 $A\cap B$
$(-4,1]\cap[-1,7)$
$=[-1,1)$





(2) $(A\cap B)\cup C$

解 $(A\cap B)\cup C$
$=(-1,\infty)$

3. 設 $A=(-\infty, 3)$， $B=[-4, 9]$， $C=(1, \infty)$，求

(1) $A\cup B$

解 $A\cup B=(-\infty<x<3)\cup(-4\le x\le 9)$
$=(-\infty<x\le 9)$

(2) $A\cap C$

解 $A\cap C=(-\infty<x<3)\cap(1<x<\infty)$
$=(1<x<3)$

(3) $B\cap C$

解 $B\cap C=(-4\le x\le 9)\cap(1<x<\infty)$
$=(1<x<9)$

(4) $(A\cup B)\cap C$

解 $(A\cup B)\cap C=(-\infty<x\le 9)\cap(1<x<\infty)$
$=(1<x\le 9)$

(5) $(A\cap C)\cup(B\cup C)$

解 $(A\cap C)\cup(B\cup C)=(1<x<3)\cup(-4\le x<\infty)=(-4\le x<\infty)$
$\because B\cup C=(-4\le x<9)\cup(1<x<\infty)$
$=(-4\le x<\infty)$

習題 1-2

1. 若 $|3x-6|\le 3$ 求滿足左式 x 所在的區間。

解 $|3x-6|\le 3 \Leftrightarrow -3\le 3x-6\le 3$

$\Leftrightarrow 6-3\le 3x\le 6+3$

$\Leftrightarrow 3\le x\le 9$

$\Leftrightarrow 1\le x\le 9$

2. 求下列之值

(1) $\sqrt{16}$

解 $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=|4|=4$

(2) $\sqrt{(-7)^2}$

解 $\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$

3. 求滿足 $|x+2|\ge 4$ 的 x 所在區間。

解 $|x+2|\ge 4 \Leftrightarrow x+2\le 4$ 或 $x+2\ge 4$

$\Leftrightarrow x\le -6$ 或 $x\ge 2$

4. 求滿足 $|x-3|<6$ 的 x 所在區間。

解 $|x-3|<6 \Leftrightarrow x-3<-6$ 或 $x-3>6$

$\Leftrightarrow x<-3$ 或 $x>9$

5. 求滿足 $|x^2+1|<2$ 的 x 所在區間。

解 $|x^2+1|<2 \Leftrightarrow x^2+1<-2$ 或 $x^2+1>2$

$\Leftrightarrow x^2<-3$ 或 $x^2>1$

$\Leftrightarrow x\le-\sqrt{-3}$ 或 $x>1$

習題 1-3

求下列的值

1. $\frac{1}{x^5}$

解 $\frac{1}{x^5}=x^{-5}$

2. $\sqrt[3]{x^2}$

解 $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$

3. $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

解 $\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}=x^{-\frac{3}{2}}$

4. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

解 $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=x^{-\frac{2}{3}}$

5. $x^{\frac{2}{3}}$

解 $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$

6. $x^{-\frac{4}{5}}$

解 $x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

7. $x^{-\frac{4}{3}}$

解 $x^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

8. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

解 $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{16^{-1}}=\sqrt[4]{(2^4)^{-1}}=\sqrt[4]{2^{-4}}=2^{\frac{-4}{4}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$

9. $(\frac{1}{e})^0$

解 $(\frac{1}{e})^0=1$

10. $[(\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}]^6$

解 $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^6 = 1^{\frac{6}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

11. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

解 $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \sqrt[4]{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{2}{3}$

12. $\frac{2^3 \cdot 2^{-1}}{2^{-2}}$

解 $\frac{2^3 \cdot 2^{-1}}{2^{-2}} = \frac{\frac{8}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{1}{4}} = 4 \times \frac{4}{1} = 16$

13. $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{2}$

解 $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{3})(\sqrt{8}+\sqrt{3})}{2(\sqrt{8}+\sqrt{3})} = \frac{8-3}{2(\sqrt{8}+\sqrt{3})} = \frac{5}{2(\sqrt{8}+\sqrt{3})}$

14. $\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}$

解 $\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3} = \frac{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)}{3(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{(2-1)}{3(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1)}$

15. $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

解 $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{(1+x-1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

16. $\dfrac{\sqrt{h}-1}{\sqrt{h}+2}$

解 $\dfrac{\sqrt{h}-1}{\sqrt{h}+2}=\dfrac{h-1}{(\sqrt{h}+2)(\sqrt{h}+1)}=\dfrac{h-1}{h+2\sqrt{h}+\sqrt{h}+2}=\dfrac{h-1}{h+3\sqrt{h}+2}$

習題 1-4

求下列的因式分解

1. h^2-h-1

解 $h^2-h-1=h^2-2h+1+h$
$=(h-1)^2+h$

2. x^3-27

解 $x^3-27=x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+9)$

3. y^3-y^2-y-2

解 $y^3-y^2-y-2=(y-2)(y^2+y+1)$

4. x^3-2x^2-x-2

解 $x^3-2x^2-x-2=x(x^2-2x-1-2$
$=x(x^2-2x-3)$
$=x(x+1)(x-3)$

5. x^2-x-12

解 $x^2-x-12=(x-4)(x+3)$

6. $3x^2-4xy-4y^2$

解 $3x^2-4xy-4y^2=(3x+2y)(x-2y)$

7. $2y^2-3y-2$

解 $2y^2-3y-2=(2y+1)(y-2)$

8. $9h^2-12h+4$

解 $9h^2-12h+4=(3h-2)^2$

9. x^2-2

解 $x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

10. $2x^3-5x^2-4x+3$

解 $2x^3-5x^2-4x+3=(x+1)(2x-1)(x-3)$

習題 1-5

求下列各分式的化簡

1. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

解 $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}=\dfrac{(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{x+2}{x+1}$

2. $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$

解 $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}=\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$

3. $3+\dfrac{2x+1}{x-3}$

解 $3+\dfrac{2x+1}{x-3}=\dfrac{3(x-3)+2x+1}{x-3}=\dfrac{3x-9+2x+1}{x-3}=\dfrac{5x-8}{x-3}$

4. $\dfrac{x+6}{x^2-2x-3}-\dfrac{x-1}{x^2+x-12}$

解 $\dfrac{x+6}{x^2-2x-3}-\dfrac{x-1}{x^2+x-12}=\dfrac{(x+6)}{(x-3)(x+1)}-\dfrac{(x-1)}{(x+4)(x-3)}$

$=\dfrac{(x+6)(x+4)-(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)(x+4)}$

$=\dfrac{x^2+10x+24-\left[x^2-1\right]}{(x-3)(x+1)(x+4)}$

$=\dfrac{10x+25}{(x-3)(x+1)(x+4)}$

5. $\dfrac{x^3-1}{x^2-2x-8}\cdot\dfrac{x^2-x-12}{x^2-1}$

解 $\dfrac{x^3-1}{x^2-2x-8}\cdot\dfrac{x^2-x-12}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-4)(x+2)}\cdot\dfrac{(x-4)(x+3)}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{(x^2+x+1)(x+3)}{(x+2)(x+1)}$

6. $\dfrac{\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+2x+1}}{\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+6x+5}}$

解 $\dfrac{\dfrac{2x-x-1}{x^2+2x+1}}{\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+6x+5}}=\dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+1)^2}\cdot\dfrac{(x+1)(x+5)}{(3x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{(2x+1)(x+5)}{(x+1)(3x+1)}$

7. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}}{x-3}$

解 $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}}{x-3}=\dfrac{\dfrac{3-x}{3x}}{x-3}=\dfrac{3-x}{3x}\cdot\dfrac{1}{x-3}$

$=\dfrac{-(x-3)}{3x}\cdot\dfrac{1}{x-3}$

$=-\dfrac{1}{3x}$

習題 1-6

1. 一直通過點(2, 3)且斜率為 4，試求其方程式。

解 $x_1=2,\quad y_1=3,\quad m=4$

$y-3=4(x-2)$

$y-3=4x-8$

$y=4x-8+3$

$y=4x-5$

2. 一直線之 y 截距為 4 且斜率為−2，試求其方程式。

解 $b=4, m=-2$

$\because y=mx+b$

$y=-2x+4$

3. 一直線通過兩點(2, 3)與(4, 8)，試求其方程式。

解

$x_1=2, x_2=4, y_1=3, y_2=8$

$\Delta x=x_2-x_1=4-2=2$

$\Delta y=y_2-y_1=8-3=5$

$m=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{5}{2}$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-3=\dfrac{5}{2}(x-2)$

$y=\dfrac{5}{2}x-\dfrac{10}{2}+3$

$y=\dfrac{5}{2}x-2$

4. 一直線通過點$(3, -3)$且平行於直線 $2x+3y=6$ ，試求其方程式。

解

$2x+3y=6$

$3y=-2x+6$

$y=-\dfrac{2}{3}x+2$

$\therefore m=-\dfrac{2}{3}$

$(\because L_1 // L_2 \quad \therefore m_1=m_2=m)$

$\therefore x_1=3, \quad y_1=-3$

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y+3=-\dfrac{2}{3}(x-3)$

$y+3=-\dfrac{2}{3}x+2$

$y=-\dfrac{2}{3}x-1$

5. 試求直線 $4x+5y=4$ 的斜率與 y 截距。

解

$$4x+5y=4$$
$$5y=-4x+4$$
$$y=-\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}$$
$$\therefore m=-\frac{4}{5}$$
$$b=\frac{4}{5}$$

6. 一直線平分兩點$(-2,\ 1)$與$(4,\ -7)$之間所連線段且垂直此線段，試求此直線的方程式。

解

$$\Delta x=4-(2)=6$$
$$\Delta y=-7-(1)=-8$$
$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}$$
$$\therefore y+2=-\frac{4}{3}(x-1)$$

平分兩點的座標爲 $(1,-4)$，$m=\frac{4}{3}$

故垂直此線段的直線方程式爲 $y-(-4)=\frac{4}{3}(x-1)$

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}-4$$
$$\therefore y=\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$$