無窮極限－數值法

Ex：$f(x)=\dfrac{1}{x}$

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$ ____

(2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=$ ____

Sol :

(1)

x	10	1	10^{-1}	$10^{-100}\to 0^+$
$f(x)$	10^{-1}	1	10	$10^{100}\to\infty$

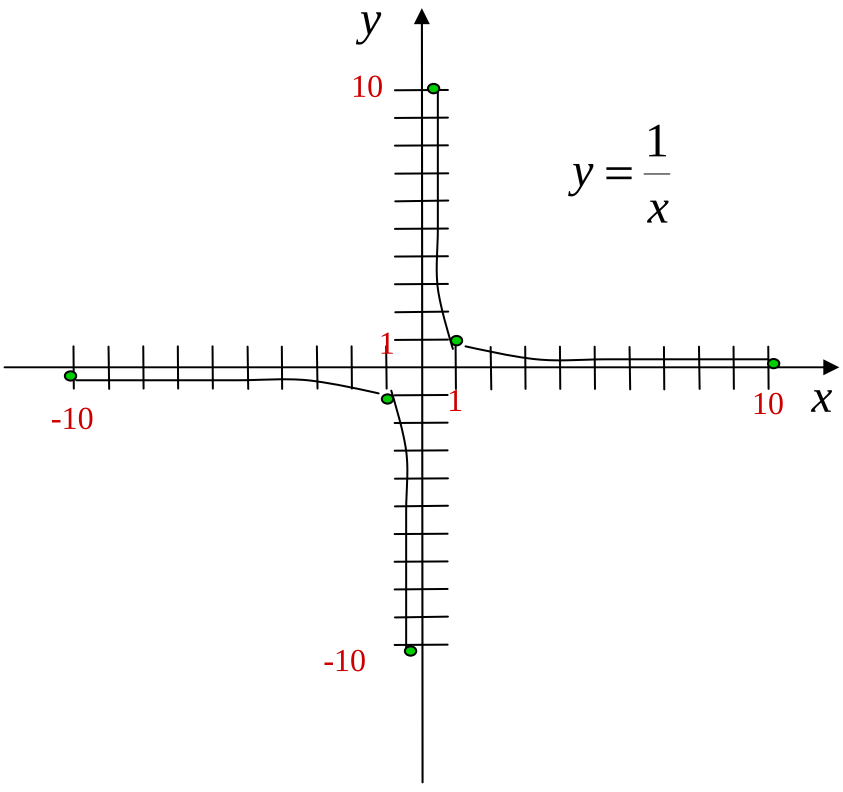
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty$$

(2)

x	-10	-1	-10^{-1}	$-10^{-100}\to 0^-$
$f(x)$	-10^{-1}	-1	-10	$-10^{100}\to-\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$$

無窮極限－圖形法



$x=0$ (y 軸) 為 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的垂直漸近線

無窮極限－記號

註：

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$：當 x 充分趨近 a 時，$f(x)$ 趨近於無限大

(2) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$：當 x 充分趨近 a 時，$f(x)$ 趨近於負無限大

(3) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$：當 x 從 a 的右邊充分趨近 a 時，

$f(x)$ 趨近於無限大

(4) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$，$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$：$\cdots$

定 理

定理：

(1) 若 n 為正偶數，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^n}=\infty$

(2) 若 n 為正奇數，則 $\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{1}{(x-a)^n}=\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{1}{(x-a)^n}=-\infty\end{cases}$

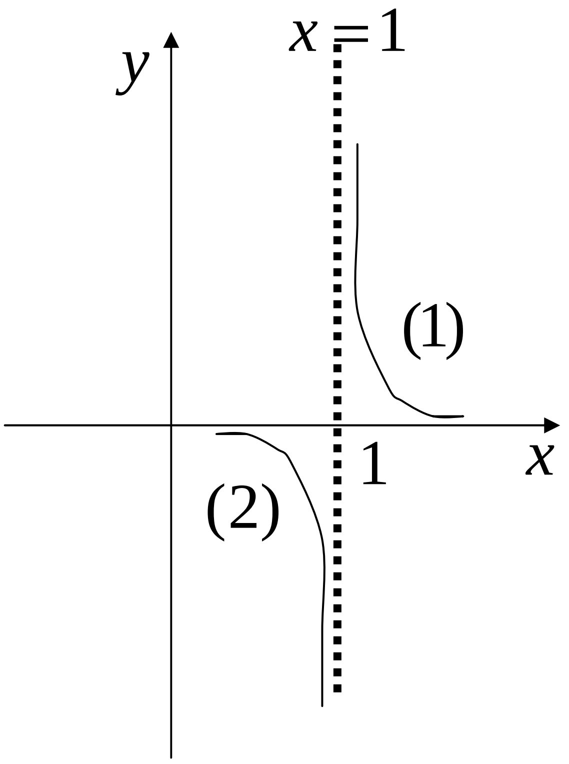
例 題

$Ex1$： $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ ________

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ ________

(3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ ________



垂直漸近線

定義： 下列中有一者成立

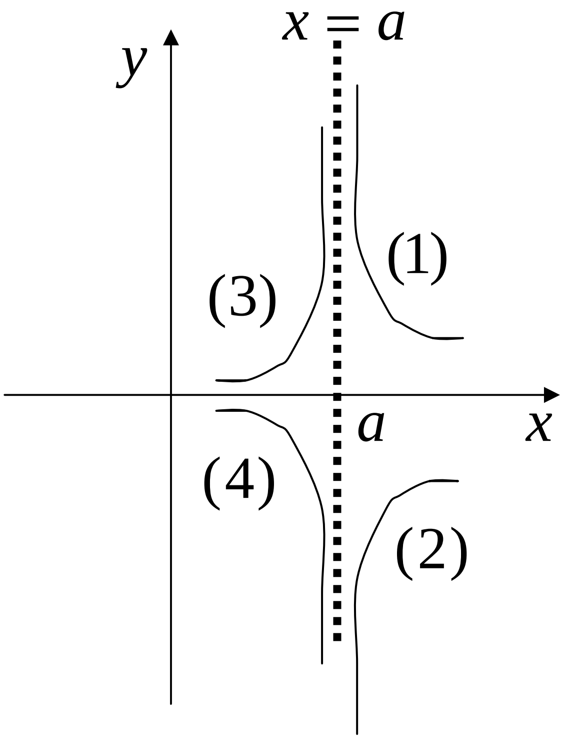
(1) $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$

(2) $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

(3) $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$

(4) $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

則稱直線$x=a$為函數 f 的垂直漸近線



例 題

$Ex2$：$f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-4}$, 求 $f(x)$ 的垂直漸近線

Sol：$x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow x\pm 2=0$ 為可能的垂直漸近線方程式

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x+2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\infty$$

$\Rightarrow x-2=0$ 為 $f(x)$ 垂直漸近線

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{4} \quad , \quad \lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{1}{x-2}=-\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow x+2=0$ 不為 $f(x)$ 垂直漸近線

無窮極限–數值法

Ex：$f(x)=\dfrac{1}{x}$

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=$ ____

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$ ____

Sol： (1)

x	1	10	10^{10}	$10^{100}\to\infty$
$f(x)$	1	10^{-1}	10^{-10}	$10^{-100}\to 0$

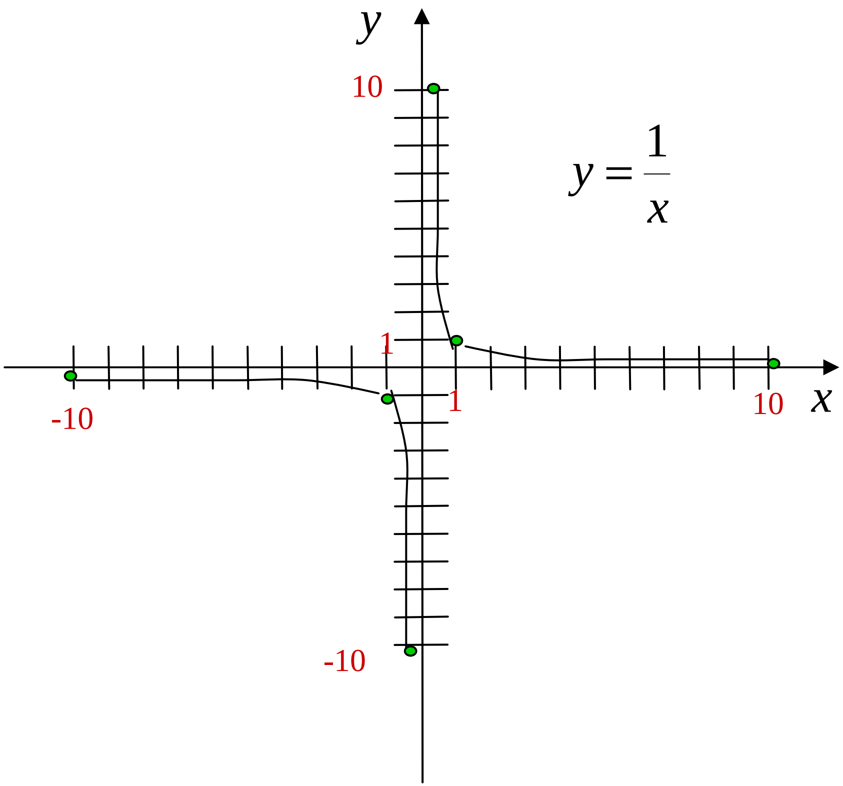
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

(2)

x	-1	-10	-10^{10}	$-10^{100}\to-\infty$
$f(x)$	-1	-10^{-1}	-10^{-10}	$-10^{-100}\to 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

無窮極限－圖形法



$y=0$ (x軸) 為 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的水平漸近線

無窮極限－記號

註：

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ 當 x 充分大時，$f(x)$ 的值可任意趨近於 L

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$ 當 x 負的充分大時，$f(x)$ 的值可任意趨近於 L

定 理

定理：

若 r 為正有理數, c 為實數, 且 x^r 有定義, 則

$$(1)\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^r}=0 \qquad (2)\lim_{x\to-\infty}\frac{c}{x^r}=0$$

例 題

$$Ex4：\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-6}$$

$$Sol：\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2-4}{x^2}}{\dfrac{x-6}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}}$$

$$=\infty$$

例 題

$$Ex5：\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^3-6}$$

$$Sol：\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x^3-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4}{x^3}}{\frac{x^3-6}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}}{1-\frac{6}{x^3}}$$

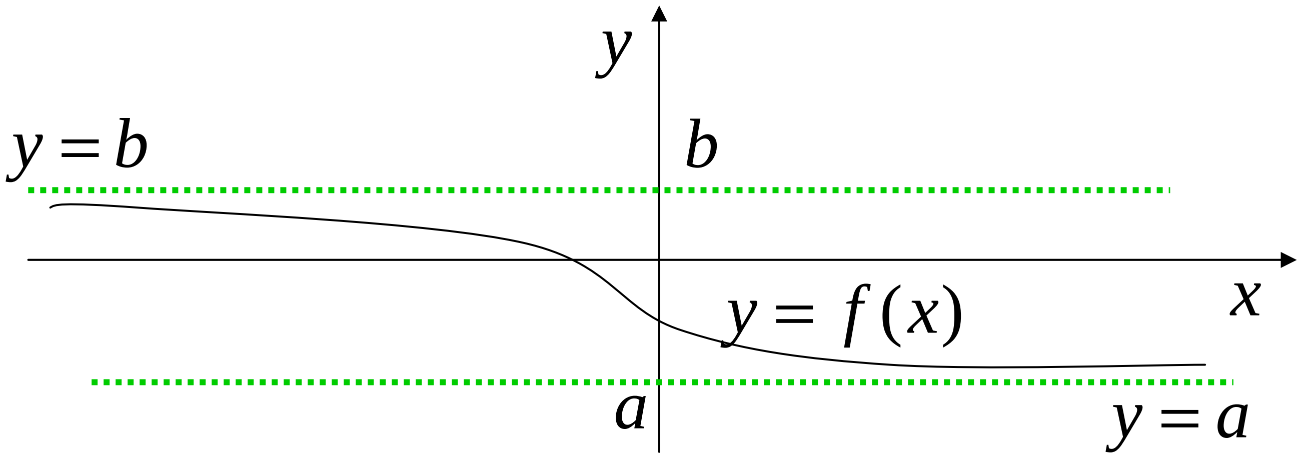
$$=0$$

水平漸近線

定義：

若 $\lim_{x\to\infty} f(x)=a$, 則稱直線 $y=a$ 為函數 $f(x)$ 的水平漸近線

若 $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$, 則稱直線 $y=b$ 為函數 $f(x)$ 的水平漸近線



例 題

$Ex6$：求 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$ 的水平漸近線

Sol：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}=1$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}=1$

$\Rightarrow y=1$ 為 $f(x)$ 的水平漸近線

例 題

$Ex7$：求 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ 的水平漸近線

Sol：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$ ，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{(-x)^2}}}=-1$$

$\Rightarrow y=\pm1$ 為 $f(x)$ 的水平漸近線