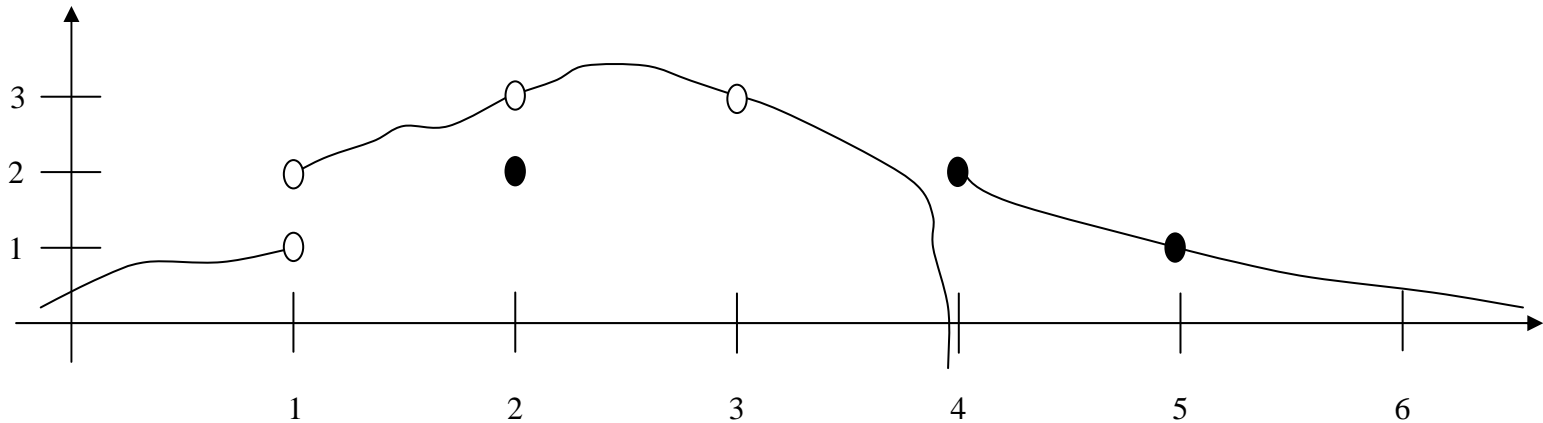


連續性



[1] $f(1) = \underline{\quad}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \underline{\quad}$, $f(x)$ 在 $x = 1$ 連續?

[2] $f(2) = \underline{\quad}$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\quad}$, $f(x)$ 在 $x = 2$ 連續?

[3] $f(3) = \underline{\quad}$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \underline{\quad}$, $f(x)$ 在 $x = 3$ 連續?

[4] $f(4) = \underline{\quad}$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \underline{\quad}$, $f(x)$ 在 $x = 4$ 連續?

[5] $f(5) = \underline{\quad}$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \underline{\quad}$, $f(x)$ 在 $x = 5$ 連續?



點連續的定義



定義：

函數 $f(x)$ 在 a 連續 \Leftrightarrow (1) $f(a)$ 有定義

(2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在

(3) $f(a)$ 的值等於 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 的值

$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



連續函數



註：

(1) 函數 $f(x)$ 在 (a,b) 連續 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 (a,b) 中的點皆連續

(2) $f(x)$ 為連續函數 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中的點皆連續



例題



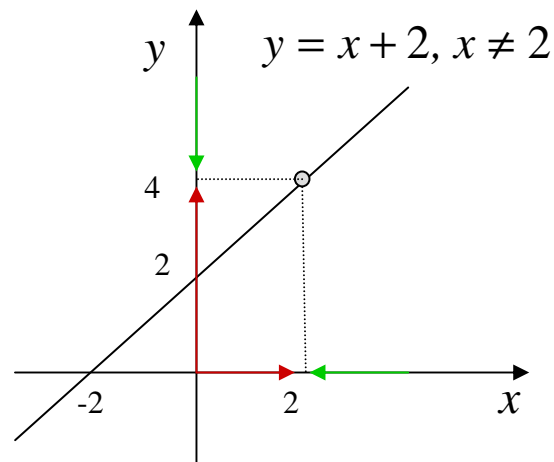
$$\text{Ex1: } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

(1) $f(2) =$ _____

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ _____

(3) $f(x)$ 在 $x = 2$ 是否連續？

(4) 試繪 $f(x)$ 的圖形



例題



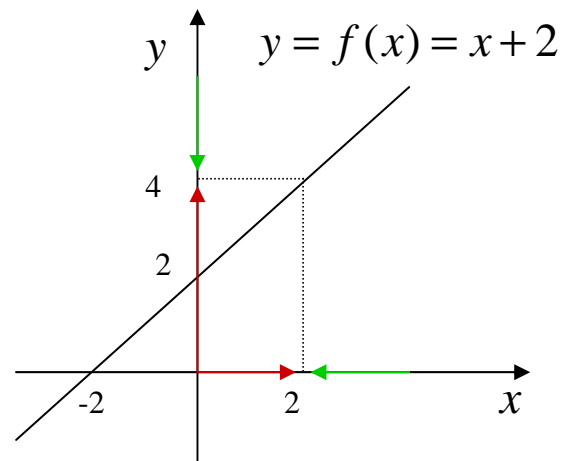
$$\text{Ex 2: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

(1) $f(2) =$ _____

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ _____

(3) $f(x)$ 在 $x = 2$ 是否連續？

(4) 試繪 $f(x)$ 的圖形



例題



Ex 3: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 2 \\ 2x-1, & x \leq 2 \end{cases}$ 在 $x=2$ 是否連續?

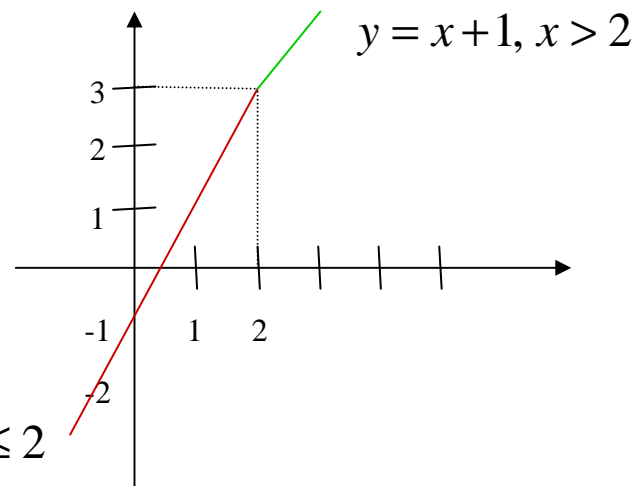
Sol : $f(2) = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-1) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 = f(2)$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x=2$ 連續



例題



Ex 4: $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 在 $x = 0$ 是否連續？

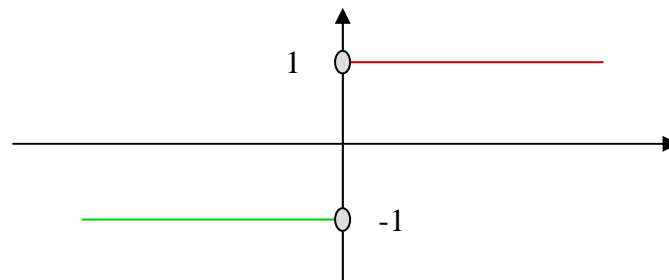
Sol: $f(0)$ 沒有定義

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在

$\Rightarrow f(x)$ 在 $x = 0$ 不連續



定理



定理：

(1) 若兩函數 f 與 g 在 a 連續，則 cf ， $f \pm g$ ， fg
與 f/g ($g(a) \neq 0$) 在 a 也連續

(2) 多項式函數為連續函數 $(\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a), a \in R)$

(3) 有理函數在其定義域內的點連續 $(\lim_{x \rightarrow a} R(x) = R(a), a \in D_R)$



例題



Ex5: $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ 在何處連續？

Sol: $D_f = \{x \mid x^2 + x - 6 \neq 0\} = \{x \mid x \neq 2, -3\}$

$\Rightarrow f(x)$ 在 D_f 中連續



例題



$$\text{Ex 6: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases}$$

若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 連續, 則 $k = ?$

Sol: 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 連續, 則

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

↓

↓

2

k

$$\Rightarrow k = 2$$

