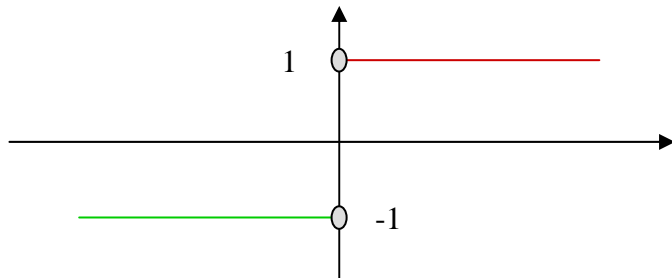


單邊極限



Ex1: 已知 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

$$\text{Sol: } f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1, & x > 0 \\ \frac{-x}{x} = -1, & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在



單邊極限定義



定義：

當 x 自 a 的右邊充分趨近於 a 時, $f(x)$ 充分趨近於唯一實數 M , 我們稱 M 為 $f(x)$ 之右極限. 記為

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = M$$

當 x 自 a 的左邊充分趨近於 a 時, $f(x)$ 充分趨近於唯一實數 L , 我們稱 L 為 $f(x)$ 之左極限. 記為

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

右極限與左極限皆稱為單邊極限.



定理



定理：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

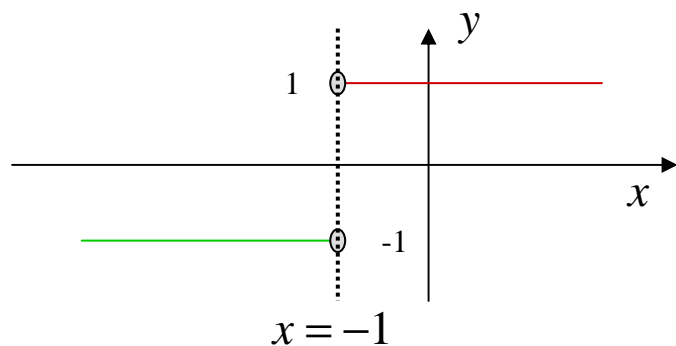


例題



Ex 2: 已知 $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$, 求 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x+1|}{x+1}$

$$\text{Sol : } f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} = \begin{cases} \frac{x+1}{x+1} = 1, & x > -1 \\ \frac{-(x+1)}{x+1} = -1, & x < -1 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1$$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 不存在



例題



Ex3: 已知 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 2 \\ 2x-1, & x < 2 \end{cases}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\text{Sol : } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

