# 極限的定理

定理 1：

設 $m$ 與 $c$ 皆為常數, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ 且 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$, 則

(1) $\lim\limits_{x\to a} c=c$

(2) $\lim\limits_{x\to a} x=a$

(3) $\lim\limits_{x\to a}(mf(x)+c)=mL+c$

# 函數四則運算的極限

定理 1：

設 $m$ 與 $c$ 皆為常數, $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 且 $\lim_{x\to a} g(x)=M$, 則

(4) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=L\pm M$

(5) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)=LM$

(6) $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}\ (M\neq 0)$

# 多項式函數的極限

定理 2：

設 $P(x)$ 為 n 次多項式函數, 則 $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a), \forall a \in R$

$Pf$：設 $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0$

則 $\lim\limits_{x\to a} P(x) = \lim\limits_{x\to a}(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)$

(*by* (1), (3), (4)) $= c_n \lim\limits_{x\to a} x^n + c_{n-1} \lim\limits_{x\to a} x^{n-1} + \cdots + c_1 \lim\limits_{x\to a} x + c_0$

(*by* (5)) $= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0$

$= P(a)$

# 例 題

$Ex1$：求 $\lim_{x\to 2}(x^3-2x+1)$

$Sol$：$\lim_{x\to 2}(x^3-2x+1)=2^3-2\cdot 2+1=5$

# 有理函數的極限

定理 3：

設 $R(x)$ 為有理函數，則 $\lim_{x \to a} R(x) = R(a), \forall a \in D_R$

$Pf$：設 $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x), Q(x)$ 為多項式函數

$$\text{則} \lim_{x \to a} R(x) = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \to a} P(x)}{\lim_{x \to a} Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = R(a)$$

(by 定理 1(6))　(by 定理 2, $Q(a) \neq 0$)

# 例 題

$Ex\,2$：求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$

$Sol$ ：$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = 0$

$Ex\,3$：求 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$Sol$ ：$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2)$$

$$= 4$$

# 合成函數的極限

定理 4：

若兩函數 $f$ 與 $g$ 的合成函數 $f(g(x))$存在，且

(1) $\lim_{x\to a} g(x) = b$　　(2) $\lim_{y\to b} f(y) = f(b)$

則 $$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b)$$

# 例 題

$Ex\,4$：設 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1},\ g(x)=x^2$，求 $\lim\limits_{x\to 2} f(g(x))$

$Sol$：$\lim\limits_{x\to 2} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to 2} g(x)) = f(\lim\limits_{x\to 2} x^2) = f(4) = \dfrac{3}{5}$

# 根號函數的極限

定理 5：

(1) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, 當 $a \ge 0$ 且 $n \in \mathrm{N}$ 時,

或當 $a < 0$ 且 $n = 1,3,5,\cdots$ 時

(2) $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, 當 $\lim_{x \to a} f(x) \ge 0$ 且 $n \in \mathrm{N}$ 時,

或當 $\lim_{x \to a} f(x) < 0$ 且 $n = 1,3,5,\cdots$ 時

# 例 題

$Ex5$：求 $\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})$

$$Sol：\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})$$
$$=\sqrt[3]{8}+\sqrt{8}$$
$$=2+2\sqrt{2}$$

$Ex6$：求 $\lim_{x\to 10}\left(\sqrt{\frac{x-9}{x-1}}\right)$

$$Sol：\lim_{x\to 10}\left(\sqrt{\frac{x-9}{x-1}}\right)$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to 10}\frac{x-9}{x-1}}$$
$$=\frac{1}{3}$$