連續型機率分配

- 很多自然現象或經濟、社會科學實例，所觀察到的隨機變數，大都是連續的隨機變數。這些連續的隨機變數具有共同的特性，其機率分配的形態很類似。例如：人的身高，大部分的人都很接近而且集中在平均身高，只有極少部分的人較高或較矮，身高的機率分配接近常態分配。
- 本單元先介紹連續機率分配的概念，再介紹推論統計中最重要的常態分配，與另一連續分配，指數分配。

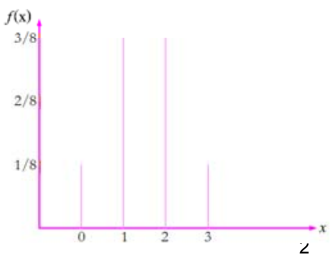
離散型機率分配

離散型機率分配之基本性質：

- 可以計數並列出所有可能值，而且每一個值都有機率值。
- 設X為離散型隨機變數，f (x)為X的機率分配函數(**機率質量函數**)，則
  1) 對於X中的每一個x，f (x) ≧0。
  2) Σ f (x) ＝1

Ex:投擲公正幣三次，出現正面之機率分配

正面數x	機率 P(x=a)=f(a)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
合計	1

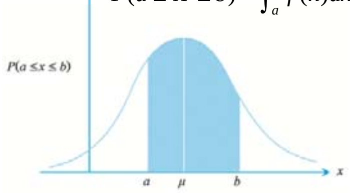


連續型機率分配

連續型機率分配之基本性質：

- 無法列出所有的可能值，因連續隨機變數值是無限的，所以無法計數。所以連續隨機變數X數值是不可數且無限的數字。
- 設X為連續型隨機變數，f (x)為X的機率分配函數(**機率密度函數**)，則 f(x)符合以下條件：(1) f(x)≧ 0
  (2) f(x)圖形下總面積為1 ,即$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$。
- f(x)並非機率，即f(a) ≠P (X = a)，a為任意數。
- P(X = a) =0，即連續隨機變數任一值的機率為0。
- 在f(x)下，P(a≦ x ≦ b)表x介於a、b之間的機率，亦f(x)曲線下介於a 、 b之間的面積，如右圖陰影的部分。

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx$$



連續型機率分配 – 例題

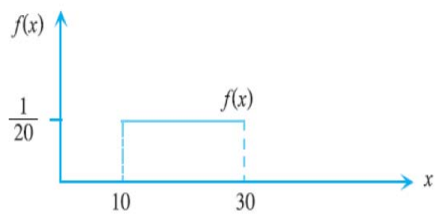
隨機變數X為一連續隨機變數，其機率密度函數

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{20}, 10 \le x \le 30 \\ 0，x \text{為其他值} \end{cases}$$

(1)劃出$f(x)$

(2)證明$f(x)$為機率密度函數

(1)



連續機率分配$f(x)$的機率分配圖

連續型機率分配－例題

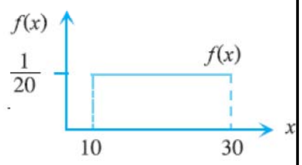
隨機變數 X 為一連續隨機變數，其機率密度函數

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{20}\text{, } 10 \le x \le 30 \\ 0\text{，} x \text{ 為其他值}\end{cases}$$

(3)求 $P(20 \le X \le 30)$

(4)求 $P(X=25)$

(5)求 $P(X \le 25)$



(3)$P(20 \le X \le 30) = 10 \times \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{2}$

$$P(20 \le X \le 30) = \int_{20}^{30} \frac{1}{20}\, dx = \frac{x}{20}\Big|_{20}^{30} = \frac{1}{20}(30-20) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

(4)$P(X=25)=0$

5

期望值與變異數

離散型機率分配：

$$\mu = E(X) = \sum x f(x) = \sum x P(x)$$

$$\delta^2 = V(X) = \sum (x-\mu)^2 f(x) = E(X^2) - E(X)^2 = \sum x^2 f(x) - \mu^2$$

連續型機率分配：

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$\delta^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \mu^2$$

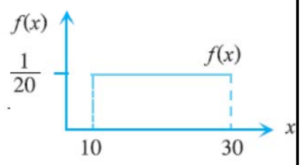
6

連續型機率分配－例題

隨機變數 X 為一連續隨機變數，其機率密度函數

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{20}, & 10\le x\le 30\\ 0\text{，}x\text{ 為其他值}\end{cases}$$

求 $E(x)$，$Var(x)$



$$E(X)=\int_{10}^{30}xf(x)dx=\int_{10}^{30}x\cdot\frac{1}{20}dx=\frac{1}{40}x^2\Big|_{10}^{30}=\frac{1}{40}(900-100)=\frac{800}{40}=20$$

7

連續型機率分配－例題

隨機變數 X 為一連續隨機變數，其機率密度函數

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1\le x\le 2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

(1)劃出 $f(x)$

(2)證明 $f(x)$ 為機率密度函數

8

連續型機率分配－例題

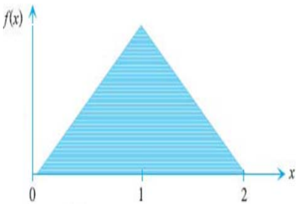
隨機變數 X 為一連續隨機變數，其機率密度函數

$$f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1\le x\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(3)求 $P(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2})$

(4)求 $P(X\le\frac{3}{2})$

(5)求 $P(X=\frac{1}{2})$

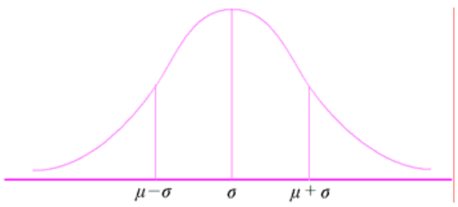


(3) $P(\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2})=$ 兩梯形面積

$$=(\frac{1}{2}+1)\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2=\frac{3}{4}$$

常態分配

- 常態分配(Normal Distribution)是統計學中最重要的一個分配，亦為連續分配中最重要的一個分配。
- 常態分配的圖形（次數分配曲線），是一個對稱的鐘形曲線，稱常態曲線。

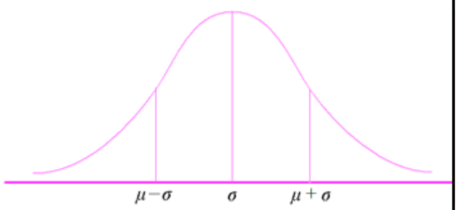


- 常態分配是統計推論的基礎分配，它描述不同抽樣中母體參數估計值之機率分配。
- 此分配是由高斯（K. F. Gauss 1777-1855）所提出，所以亦稱高斯分配（Gauss Distribution）。

常態分配

- 常態隨機變數一般記做　$X \sim N(\mu, \sigma)$
- 常態分配機率密度函數　$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$
- 對於所有x值，其機率密度函數f(x)為一連續函數，f(x)值恆正，且f(x)曲線下的總面積必須等於1。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

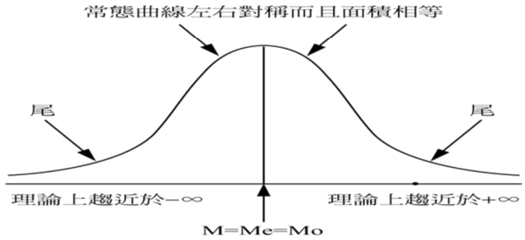


- μ與σ是常態分配中的重要參數。
- μ表常態曲線的中心位置。
- σ表常態曲線分散程度，當σ愈大表資料愈分散，當σ愈小表資料愈集中。

常態曲線的特性

★常態機率分配和它的圖形具有下列幾項特徵：

1. 常態曲線以鐘形呈現，在正中央部分為其頂峰。該點是機率分配的平均數、中位數及眾數所在。
2. 常態機率分配以其平均數為中心，左右對稱。換句話說，左右兩邊的曲線相互對應，並可對摺重疊。
3. 常態曲線以其平均數為中心，向左右兩邊X軸緩和地趨近，但不相切。



常態分配-變異數相同,平均數不同

- 不同平均數μ和σ決定不同的常態分配。下圖表示2個具有相同變異數卻有不同平均數的常態分配。

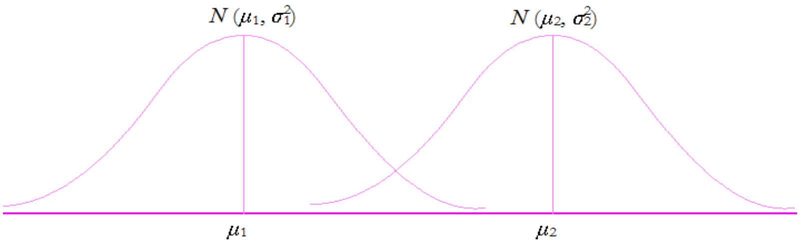


圖 7-12　有不同平均數，但相同變異數的常態曲線（$\mu_1 < \mu_2$，$\sigma_1 = \sigma_2$）

常態分配-變異數不同,平均數相同

- 下圖描述了2個具有相同平均數卻有不同變異數的常態分配。
- 常態分配的變異數愈大時，常態曲線形狀會變的矮且分散。
- 變異數愈小時，常態曲線形狀會變的高且集中。

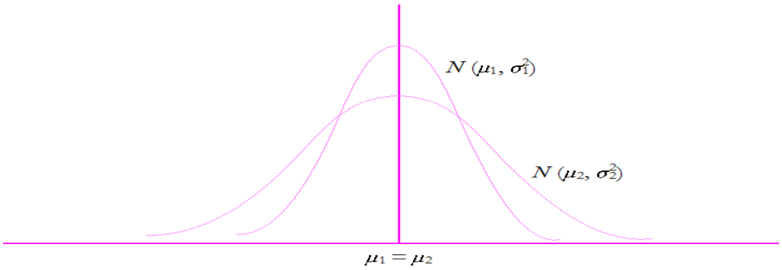


圖 7-13　有相同平均數，但不同變異數的常態曲線（$\mu_1 = \mu_2$，$\sigma_1 < \sigma_2$）

標準常態分配

標準常態機率分配

從以上可以發現，平均數與標準差的不同，構成許多不同的常態機率分配，數目則毫無限制，因此無法像二項式分配一樣，提供一張通用的機率表，所以常態分配必須「標準化」，所有的常態皆可以化成 $\mu=0$，$\sigma=1$ 的「**標準常態分配**（the standard normal distribution）」。

轉化一般常態分配為標準常態分配的第一步便是標準化，將一般數值轉化z值，公式如下：

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

其中：X=任何特定觀察值。

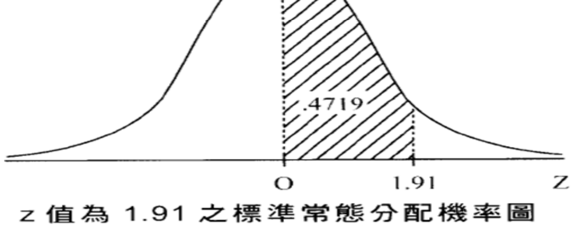
μ=平均數。σ=標準差。

z值是X值與μ值的差異，以σ來衡量其距離者。

15

標準常態分配-查表

舉例來說，一數值經計算 z 值為 1.91，在標準常態曲線下，平均數與 X 之間的面積是多少？從表中最左一行往下找到 1.9，再往右尋找，與最上一列為 0.01 對稱的機率值 0.4719 便是答案。這便是觀察值落於平均數與 z 值 1.9 之間的機率。

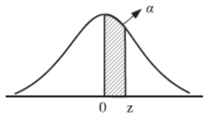


z 值為 1.91 之標準常態分配機率圖

16

標準常態分配表

$P(0<Z<z)$

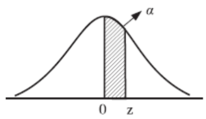


Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441

17

標準常態分配表

$P(0<Z<z)$



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

18

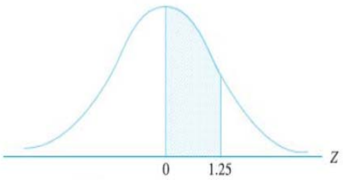
標準常態分配-例題

設 $Z \sim N(0,1)$，求下列各機率值

(1) $P(0<Z<1.25)$

(2) $P(Z>1.21)$

(1) $P(0<Z<1.25)=0.3944$



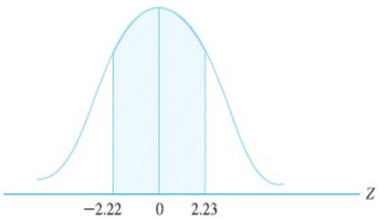
標準常態分配-例題

設 $Z \sim N(0,1)$，求下列各機率值

(3) $P(-2.22<Z<2.23)$

(4) $P(Z<-1.69)$

(3) $P(-2.22<Z<2.23)=0.4868+0.4871=0.9739$



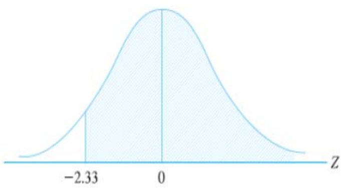
標準常態分配-例題

設 $Z \sim N(0,1)$，求下列各機率值

(5) $P(Z > -2.33)$

(6) $P(0.69 < Z < 1.57)$

(5) $P(Z > -2.33) = 0.5 + 0.4901 = 0.9901$

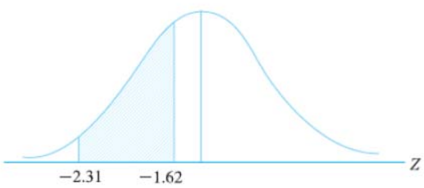


標準常態分配-例題

設 $Z \sim N(0,1)$，求下列各機率值

(7) $P(-2.31 < Z < -1.62)$

(7) $P(-2.31 < Z < -1.62) = 0.4896 - 0.4474 = 0.0422$



標準常態分配-例題

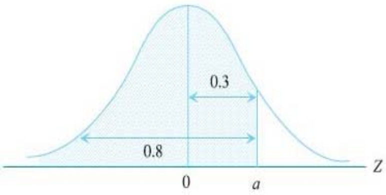
設 $Z \sim N(0,1)$，求下列 z 值

(1)$P(Z<a)=0.8$

查表時以查最接近面積（機率）的 Z 值為原則

(1)$P(Z<a)=0.8$，如圖，因為 $P(0<Z<a)=0.3$

查面積（機率）最接近 0.3 的 Z 值 得 $a=0.84$



$P(Z< a)= 0.8$，$P(0<Z< a)= 0.3$

(2)$P(Z<b)=0.15$

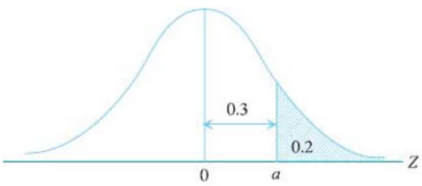
標準常態分配-例題

設 $Z \sim N(0,1)$，求下列 z 值

(3)$P(Z>a)=0.20$

(3)$P(Z>a)=0.2$，如圖，因為

$P(0<Z<a)=0.3$ 得 $a=0.84$



$P(Z> a)= 0.2$，$P(0 < Z < a)= 0.3$

(4)$P(Z>b)=0.9$

標準常態分配-例題

- 求常態分配的機率前，先利用下列轉換公式，將常態隨機變數X轉換成標準常態隨機變數Z，再使用附表查出面積（機率）

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)\xrightarrow{\text{（標準化）}}Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\rightarrow Z\sim N(0,1)$$

$$E(Z)=E(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma}E(X)-\frac{\mu}{\sigma}=0$$

$$Var(Z)=Var(\frac{X-\mu}{\sigma})=\frac{1}{\sigma^2}Var(X)=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

25

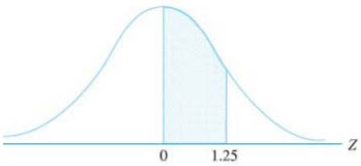
常態分配-例題

$X\sim N(60,8^2)$ 求

(1)$P(60<X<70)$

(1)$P(60<X<70)=P(\frac{60-60}{8}<Z<\frac{70-60}{8})$

$=P(0<Z<1.25)=0.3944$



$P(0<Z<1.25)=0.3944$

(2)$P(X>82)$

26

常態分配-例題

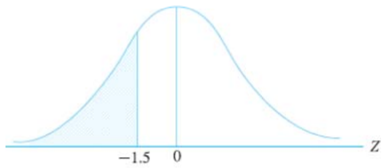
$X \sim N(60, 8^2)$ 求

(3)$P(X < 48)$

(3)$P(X<48)=P(Z<\frac{48-60}{8})$

$=P(Z<-1.5)=0.5-0.4332$

$=0.066$



$P(Z < -1.5) = 0.0668$

(4)$P(X > 55)$

常態分配-例題

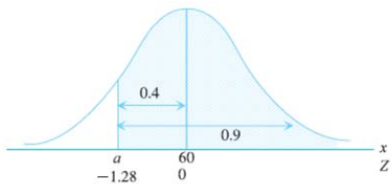
$X \sim N(60, 8^2)$ 求

(5)$P(X > a) = 0.9$，求 a 值

(5)查面積最接近 0.4 的 z ，又因 a 在平均數左邊得 $z=-1.28$

$\frac{a-60}{8}=-1.28$　　$a=60-8\times 1.28$

$=49.76$



$P(x > a) = 0.09$，$P(a < x < 60) = 0.4$，$P(-1.28 < Z < 0) = 0.4$

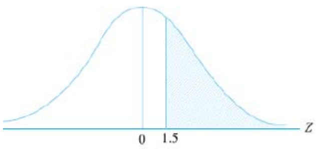
(6)$P(X < b) = 0.95$，求 b 值

常態分配-例題

假設某次大學聯考考生之分數呈常態分配，其中$\mu=500$分，$\sigma=100$分，求學生之分數為下列各種情形之機率？(1)超過 650 分 (2)介於 325 分與 675 分之間

(1) $P(X>650)=P(Z>\frac{650-500}{100})=P(Z>1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$



$P(Z>1.5)=0.0668$

29

常態分配-例題

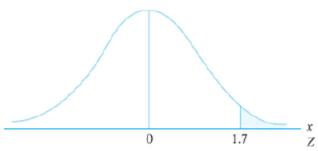
假設某次大學聯考考生之分數呈常態分配，其中$\mu=500$分，$\sigma=100$分，求學生之分數為下列各種情形之機率？

(3)如果其中某一學校只招收成績高於 670 分之學生，設有 10,000 個考生則有多少學生有資格進入該校 (4) 你如何制定一標準，使得 70%之學生被錄取

(3) $P(X>670)=P(Z>\frac{670-500}{100})$

$=P(Z>1.7)=0.5-0.4554=0.0446$

$10{,}000\times0.0446=446$（人）



$P(Z>1.7)=0.0446$

30

指數分配

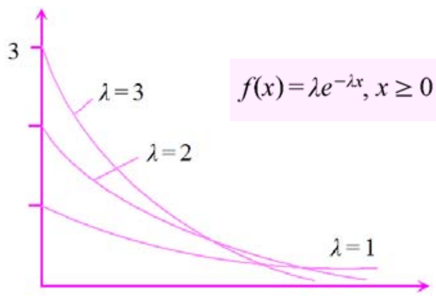
- 卜瓦松分配是處理單位時間內，發生事件次數的可能性（機率）。
- 指數分配則是處理兩事件發生之間，所需時間的可能性（機率）。
- 指數分配：一連續隨機變數，其機率密度函數為

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0 \qquad \lambda=\frac{1}{\mu}$$

λ為指數分配的參數（λ>o），代表單位事件平均等待時間。

指數分配的分配圖

- 隨著λ不同也會有不同指數分配圖形，指數分配圖形是一個遞減的上凹圖形。
- 圖為不同的指數分配圖，對於任何指數分配的機率密度函數f(x)，f(o)= λ ，且當x趨近於無窮大時， f(x)趨近於o。



$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geq 0 \quad \lambda=\frac{1}{\mu}$$

λ= 1，λ= 2，λ= 3 下，指數機率分配的分配圖

指數分配的機率

- **指數分配的機率**: 因為指數分配為連續型分配，若要計算指數分配的機率值，只需求曲線下的面積

$$P(0<X<a)=\int_0^a f(x)dx=\int_0^a \lambda e^{-\lambda x}=-e^{-\lambda x}\Big|_0^a=1-e^{-\lambda a}$$

所以 $P(X\geq a)=e^{-\lambda a}$

$$P(a\leq X\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)=(1-e^{-\lambda b})-(1-e^{-\lambda a})=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}$$

33

指數分配-例題

一洗車廠的洗車時間是指數隨機變數，已知每分鐘平均洗 0.5 輛車，問某輛車等待時間超過 1 分鐘的機率？

$\lambda=\frac{1}{0.5}=2$ 即每車等待時間平均為 2 分鐘，所以某輛車等待時間超過 1 分鐘的機率為

$P(X\geq 1)=e^{-2}=0.1353$

指數分配的平均數與標準差為

$\mu=\sigma=\frac{1}{\lambda}$

34

利用Excel求常態分配機率

NORMDIST(x,mean,standard_dev,cumulative)

X　是要求分配之數值。

Mean　是此分配的算術平均數。

Standard_dev　是此分配的標準差。

$$true \quad 傳回 \quad P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

$$false \quad 傳回 \quad f(x)$$

Cumulative　是決定函數形式的邏輯值。如果累積是 TRUE，則 NORMDIST 傳回累積分配函數；如果是 FALSE，則傳回機率密度函數。

備註

- 如果平均數或 standard_dev 不是數值，則 NORMDIST 傳回錯誤值 #VALUE!。
- 如果 standard_dev <= 0，則 NORMDIST 傳回錯誤值 #NUM!。
- 如果 mean = 0，standard_dev = 1，且 cumulative = TRUE，則 NORMDIST 傳回標準常態分配 NORMSDIST。
- 常態密度函數的公式 (cumulative = FALSE) 是：

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

- 當 cumulative = TRUE，公式為從負無限大到已知公式的 x 範圍的整數。

35

Excel常態機率分配之反函數

NORMINV 函數

根據指定的平均數和標準差，傳回其常態累積分配函數之反函數。

語法

NORMINV(probability,mean,standard_dev)

Probability　是對應於常態分配的機率。

Mean　是此分配的算術平均數。

Standard_dev　是此分配的標準差。

例如X～N(60,8)求P(-∞ <X<a)=0.95

在公式NORMINV輸入

probability=0.95，
mean=60，
standard-dev=8，

得輸出

a=73.159`

36

利用Excel求指數分配機率值

EXPONDIST 函數

傳回指數分配之機率值。您可使用 EXPONDIST 建立兩事件間的時間模式，例如銀行自動櫃員機在提款時所花費的時間，

您可以使用 EXPONDIST 來計算這段程序最多花一分鐘的機率。

語法 EXPONDIST(x,lambda,cumulative)

X 為函數的值。

Lambda 為參數的值。

Cumulative 是一個邏輯值，用來指定指數函數的形式。如果此引數是 TRUE，則 EXPONDIST 會傳回累加分配函數；如果是 FALSE，則傳回機率密度函數。

$$\boxed{\begin{array}{l} true \ \text{傳回} \ P(0 \le X \le x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \\ false \ \text{傳回} \ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \end{array}}$$

備註

- 機率密度函數的公式是：$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$
- 累加分配函數的公式是：$F(x;\lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$

37

習 題

已知某班級的統計成績呈 $\mu=70$，$\sigma=5$ 的常態分配，並知得 A 等的學生占 15%，請問 A 等的學生中最低是多少分，若有 10%不及格，則最低及格成績是多少分？（求整數分數）

(1) $X \sim N(70,5^2)$

$P(x \ge A) = 0.15$

$P(z \ge b) = 0.15$

$P(0 < z < b) = 0.5 - 0.15 = 0.35$

$\therefore b = 1.04$

因為b=$\dfrac{A-\mu}{\sigma}$

$\therefore 1.04 = \dfrac{A-70}{5}$

$A = 75.2 \Rightarrow A = 76$分

38

習 題

車輛通過收費站時間是指數隨機變數，已知每小時平均通過 250 輛車，問在 2 分鐘內不會有車子通過之機率。

習 題

一電燈壽命為一平均值為 3000 小時的指數分配，試求該電燈壽命維持在 3000 與 3500 小時間之機率。