第6章 隨機變數與機率分配

◆隨機變數

◆機率分配概說

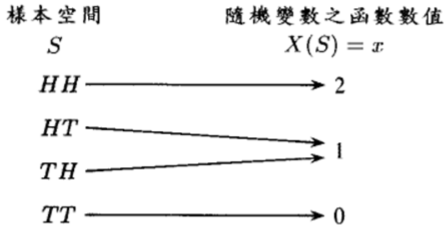
6-1 機率分配概說

第 5 章我們所討論的樣本空間，其所包含的元素有些只是定性的描述而非實際的數值。例如，擲一硬幣兩次，可能之結果(樣本點)為 HH, HT, TH 與 TT，皆為一組字母，用以描述所出現的為正面或反面；這些都只是定性的結果，而非一實際之數字。然而有時候我們所關心的是，將隨機試驗所產生之可能結果，賦予一有意義的數值，如此我們便可針對數字資料做一些統計分析。基於此一理念，引發我們對隨機試驗之可能結果予以量化，此即隨機變數的觀念。本章將探討隨機變數、機率分配，以及一些相關的課題。基本上，這些都是推論統計之重要的基礎。

6-1-1 隨機變數

對一隨機試驗所產生的樣本空間定義一函數，則此樣本空間內的每一元素(樣本點)皆有一函數值與之對應，此一函數即稱為**隨機變數**(random variable)。

隨機變數一般皆以大寫字母表示，如 X, Y, Z 等，而其函數值則以小寫字母表示，如 x, y, z 等。假定擲一硬幣兩次，則其樣本空間 $S=\{HH, HT, TH, TT\}$；若定義隨機變數 X 代表正面的個數，則 X 之可能值(函數值)為 $x=0, 1, 2$，其與樣本點之對應關係如圖　所示：



3

例 題

試寫出下列隨機變數之可能值。

(a) X 代表擲一硬幣三次，出現正面之次數。

(b) 一箱子中裝有10個球，其中有4個紅球，6個白球。採不放回抽樣，連續抽出5個球，令 Y 代表可能出現之紅球個數。

(c) Z 代表某十字路口下個月內發生車禍的次數。

(d) T 代表某一品牌日光燈管的壽命長度。

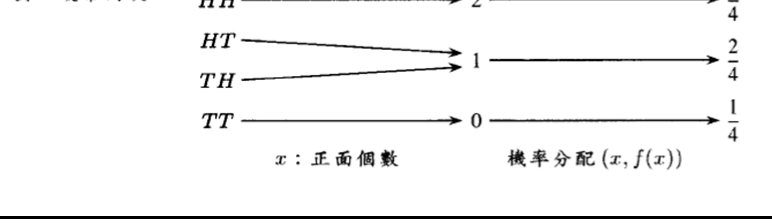
4

6-1-1 隨機變數

一隨機變數如果其可能值的個數為有限的，或雖無限但為可計數的(countable)，則稱之為**間斷型或離散型**(discrete)隨機變數；反之，若一隨機變數其可能值的個數為無限且為不可計數的，亦即係以連續測度者，則稱為**連續型**(continuous)隨機變數。在例題 5.1 中，(a), (b), (c) 皆屬於間斷隨機變數，而 (d) 則為連續隨機變數。在一般的實務應用上，通常連續隨機變數是表示**測量的**(measurable)資料，如身高、體重、溫度與時間等；而間斷隨機變數則表示**計數的**(countable)資料，如不良品的個數、意外事件次數、班級人數等。

機率分配概說

隨機變數係將樣本空間所產生的一些基本事件予以數值化的定義，若進一步求得這些事件數值化後的隨機變數之機率，此即**機率分配**(probability distribution)的觀念。也就是說，機率分配乃是針對某些隨機變數之可能值或某一範圍之隨機變數的可能值，求其機率。



例題

投擲一個公正硬幣三次，出現正面的次數為若干？

可能情況：沒有正面、一個正面、二個正面與三個正面。

請問，正面出現次數的機率分配為何？

如下表所示，一共有八種可能的結果。

H代表正面，T代表反面。

表 6-1　投擲一個公正錢幣三次，出現正面的情形

可能情況	投擲			正面次數
	第 1 次	第 2 次	第 3 次	
1	T	T	T	0
2	T	T	H	1
3	T	H	T	1
4	T	H	H	2
5	H	T	T	1
6	H	T	H	2
7	H	H	T	2
8	H	H	H	3

表 6-2 投擲公正幣三次，出現正面之機率分配

正面數x	機率 P(x)
0	1/8=0.125
1	3/8=0.375
2	3/8=0.375
3	1/8=0.125
合計	8/8=1.000

圖 6-1 投擲公正的硬幣三次，出現正面之機率分配表長條圖

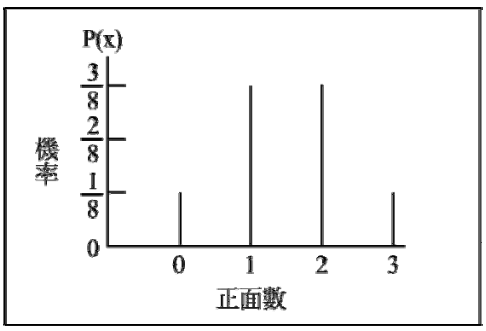


圖 6-1 投擲公正的硬幣三次，出現正面之機率分配表長條圖

通常我們以 x_i 代表隨機變數 X 之值，而以 $f(x_i)$ 表示其機率值。例如，上例中 $x_i = 0, 1, 2, 3$，而其對應的機率值為 $f(0), f(1), f(2)$ 與 $f(3)$。$f(x)$ 一般又可以 $f(x) = P(X = x)$ 表示，例如 $f(2) = P(X = 2)$。由於每一 $f(x_i)$ 皆代表機率值，故它們必介於 0 與 1 之間，且若將所有可能之 X 值所對應的機率值加總，其和必等於 1。

一間斷隨機變數 X 之機率分配可以函數表示，即

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

其中 $f(x_i)$ 必須滿足：

(1) 對於 X 中的每一 x_i，$0 \le f(x_i) \le 1$；

(2) $\sum_{i=1}^{k} f(x_i) = 1$，$X$ 之可能值為 $x_i, i = 1, 2, \cdots, k$。

6-1-2 機率分配的平均數、變異數與標準差

我們討論過次數分配的集中趨勢和離散程度。平均數告訴我們資料的集中趨勢，而變異數則告訴我們資料的離散程度。同樣的，機率分配亦可藉由平均數和變異數來表示其機率分配的特性。平均數採用的符號是 μ 、變異數採用的符號是 σ^2。

(一) 平均數

在傳達機率分配的特性時，平均數是常用的參考指標，它也可視為源於同一樣率分配的隨機變數的平均值。機率分配的平均數我們也稱為期望值 $E(x)$，它是隨機變數可能數值之加權平均數，經相對應的出現機率加權而成的。

$$\mu = E(x) = \Sigma\,[xp(x)] \qquad \text{【式 6-1】}$$

其中，$p(x)$代表隨機變數 x 的機率值。換句話說，將每一隨機變數的可能值 x 乘以其本身的機率值 $p(x)$，然後再將其加總起來就是平均數。

表 6-2 投擲公正幣三次，出現正面之機率分配

正面數x	機率 P(x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
合計	8/8

機率分配的平均數我們也稱為期望值 $E(x)$，它是隨機變數可能數值之加權平均數，經相對應的出現機率加權而成的。$\mu = E(x) = \Sigma\,[xp(x)]$

(二) 變異數

如前所述，平均數是不連續機率分配的集中趨勢值，然而它卻沒有辦法表現出機率分配的離散程度。至於變異數，則能衡量機率分配的離散程度。不連續機率分配的變異數計算公式為：

$$\sigma^2 = \Sigma\,[(x-\mu)^2 p(x)] \quad \text{【式 6-2】}$$

計算步驟如下：

1. 將每一隨機變數值減去平均值，而後將所得的差加以平方。
2. 將步驟 1 中所得到的每一數值乘以其隨機變數的機率值。
3. 將步驟 2 中所得到的每一數值加總起來即為變異數。

變異數 σ^2 的平方根即為標準差 σ，亦即 $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$。

15

表 6-2 投擲公正幣三次，出現正面之機率分配

正面數x	機率 P(x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
合計	8/8

16

離散(不連續)隨機變數X的期望值與變異數

- 離散隨機變數X的期望值定義如下：

$$\mu = E(x) = \Sigma x_i \cdot f(x_i)$$

此處$f(x_i)$為隨機變數x之機率分配函數

- 離散隨機變數X的變異數定義如下：

離散隨機變數 X 的變異數：

$$\sigma^2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \Sigma[(x_i-\mu)^2 \cdot f(x_i)]$$

此處 $f(x_i)$ 為隨機變數 X 之機率分配函數。

- 速算公式：$Var(X) = E[X^2] - [E(X)]^2 = E[X^2] - \mu^2$

17

EX. S表擲一公正骰子兩次點數的樣本空間,
X表擲一公正骰子兩次可能出現的點數和的隨機變數,
(X,f(x))表隨機變數X的機率分配
(1)寫出S (2)寫出X (3)寫出(x,f(x)) (4) 請將機率分配用長條圖表示出來。
(5) 請計算機率分配的期望值。 (6) 請計算機率分配的變異數。

18

EX.　S表擲一公正骰子兩次點數和的樣本空間,
X表擲一公正骰子兩次可能出現的點數和的隨機變數,
(X,f(x))表隨機變數X的機率分配
(1)寫出S　(2)寫出X　(3)寫出(x,f(x))　(4) 請將機率分配用長條圖表示出來。
(5) 請計算機率分配的期望值。　(6) 請計算機率分配的變異數。

7

期望值與變異數的性質

- 對於一隨機變數X，若存在函數g(X)=aX+b，此處a與b為任意常數，則我們可得到：
  E(aX+b)=aE(X) +b;　Var(aX+b)=a^2 Var(X)

$E(aX)=$

$E(b)=$

$Var(aX)=$

$Var(b)=$

期望值與變異數的性質

- 對於一隨機變數X，若存在函數g(X)=aX+b，此處a與b為任意常數，則我們可得到：

  E(aX+b)=aE(X) +b;　　Var(aX+b)=a^2 Var(X)

$$E(aX+b)=\sum(ax+b)f(x)=\sum[axf(x)+bf(x)]=\sum axf(x)+\sum bf(x)=$$
$$a\sum xf(x)+b\sum f(x)=aE(X)+b$$

$$V(aX+b)=E\{[(aX+b)-\mu]^2\}=E\{[(aX+b)-E(aX+b)]^2\}=E\{[(ax+b)-aE(x)+b]^2\}=$$
$$E[(aX-a\mu)^2]=E[a^2(X-\mu)^2]=a^2E(X-\mu)^2=a^2V(X)$$

21

期望值與變異數的性質

- 設X與Y為任意兩個隨機變數，則其和與差的期望值可表為下列等式：

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y)$$

$$Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2Cov(X,Y)$$

其中共變異數：

$$Cov(X,Y)=E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)=E(XY)-\mu_X\mu_Y$$

22

例題

隨機變數 X 表一塊餅乾中的巧克力片數，其機率分配如下：

x	2	3	4	5	6
f(x)	0.01	0.25	0.4	0.3	0.04

試求① Var(X) ② E(3X − 2) ③ Var(3X − 2)

解答:

①

x	2	3	4	5	6
P(X = x)	0.01	0.25	0.4	0.3	0.04

$\mu_X = E(X) = \sum xf(x)$

$\sigma_X^2 = V(X) = E((X-\mu)^2) = \sum (x-\mu)^2 f(x) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X^2) - \mu^2$

$\sigma_X^2 = E(X^2) - \mu_X^2 =$

② $E(3X-2) = 3E(X) - 2$

③ $Var(3X-2) = 9V(X) =$