統計方法的順序

1. 確定目的 (變量，對象)
2. 蒐集資料 (方法：普查，抽樣)
3. 整理資料 (圖形、表格)
4. 分析資料 (集中量數、離散量數)
5. 推論資料 (機率、估計、檢定)

1

第5章 機率導論

5.1 實驗、樣本空間與事件
5.2 事件機率的基本運算
5.3 條件機率
5.4 總合機率法則與貝氏定理

2

何謂機率？

- 所謂的機率是用具體的數字來描述某特定事件發生之可能性的方法。機率可將一個較模糊的程度敘述轉換為一個定量的數值。透過這樣的一個方法，我們能夠更有效地去測量、表達及分析各項不確定性的問題，以作為下決策時之重要參考。

3

機率定義

- 機率（probability）：描述某事件發生的相對可能（機會）的值，介於0與1之間，包括0與1。
  - 實驗（experiment）：可產生各種可能結果的過程。
  - 結果（outcome）：一項實驗的特定結果。結果亦稱為出象
  - 事件（event）：是一個實驗中出現的一個或一個以上結果的集合。
  - 樣本空間（sample space）:實驗中所有可能得到的結果所成之集合。

4

Ex. 實驗: 投擲一個公正骰子的實驗

可能的結果:

事件: 出現奇數點的事件 E =

出現偶數點的事件 E =

點數小於 5 的事件 E =

樣本空間: 所有可能的結果 S =

5

Ex. 投擲二個公正硬幣的實驗

可能的結果:

事件:全部為頭的事件 E =

全部為尾的事件 E =

一頭一尾的事件 E =

樣本空間: S =

6

(1)古典機率

兩種機率方法： (1)古典機率與(2)經驗機率

古典機率

$$\text{某事件發生機率} = \frac{\text{合乎事件條件的結果數目}}{\text{所有可能結果總數}}$$

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} \qquad 0 \le P(E) \le 1, \forall E \subset S$$

Ex.實驗：投擲一個公正骰子的實驗

可能的結果： 1, 2, 3, 4, 5, 6

事件：出現奇數點的事件 E1 = {1, 3, 5}

出現偶數點的事件 E2 = {2, 4, 6}

點數小於 5 的事件 E3 = {1, 2, 3, 4}

樣本空間：所有可能的結果 S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

$$P(E1) = \frac{|E1|}{|S|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ex.投擲二個公正硬幣的實驗

可能的結果: (頭，頭), (頭，尾), (尾，頭), (尾，尾)

事件:全部為頭的事件 E1 = {(頭，頭)}

全部為尾的事件 E2 = {(尾，尾)}

一頭一尾的事件 E3 = {(頭，尾), (尾，頭)}

樣本空間: S = {(頭，頭), (頭，尾), (尾，頭), (尾，尾)}

$$P(E1) = \frac{|E1|}{|S|} = \frac{1}{4}$$

9

(2)經驗機率

兩種機率方法： (1)古典機率與(2)經驗機率

經驗機率

$$\text{某事件發生機率} = \frac{\text{過去事件發生次數}}{\text{總觀察次數}}$$

10

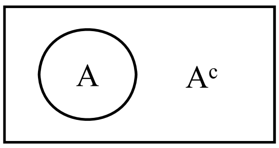
例題

一份針對某大學800名企管畢業生的研究指出，800名學生中有377名目前從事的工作領域並非在學校的主修。例如，某主修企管的學生目前是公司的總機。試求任一企管畢業生從事非主修科目及領域工作之機率。

解

餘集規則

- 給定一事件A，則事件A的餘集（complement of event A，記為A^c）是指樣本空間中不包含在A事件中之所有樣本點所成之集合。
- 定理：餘集規則
  - 對於任意事件A，$P(A^c)=1-P(A)$。



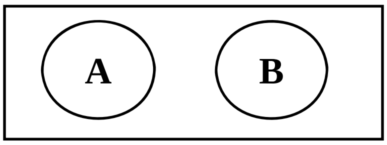
(1)若明天台北市之降雨機率為 0.8，則明天台北市不下雨的機率為 0.2。

(2)若本期統一發票之中獎機率為0.003，則不中獎之機率為0.997。

互斥

所謂互斥，係指當一事件發生時，其他事件不可能同時發生。互斥事件的例子為擲骰子實驗中，「出現 4 或 4 以上數字」的事件與「出現 2 或 2 以下數字」的事件即為互斥事件。如果結果屬 第一類{4、5、6}，就不可能同時屬於第 2 類{1、2}。工廠生產線的產品不可能同時為故障品以及良好品，故障品和良好品也是互斥事件。

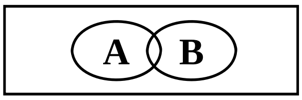
A, B為互斥事件：
$P(A\cap B)=0$



聯集規則(加法原理)

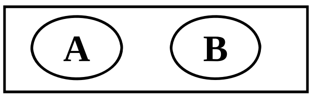
- 定理：聯集規則
  - (1)A, B為非互斥事件：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

A, B為非互斥事件：
$P(A\cap B)\neq 0$



  - (2)A, B為互斥事件：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

A, B為互斥事件：
$P(A\cap B)=0$



例題

若已知 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，$P(A\cap B)=0.1$，試求 $P(A\cup B)$、$P(A^c)$及 $P(B^c)$。

15

例題

由一副撲克牌中抽出一張牌，請問抽到紅心牌或梅花牌的機率為何？

由標準撲克牌中隨機抽出一張為老K或紅心的機率為何？

16

獨立

如果某事件的發生並不影響另一事件發生的機率，則稱其為獨立，所以如果A、B事件獨立，則A的發生並不影響B發生的機率。

舉例，投擲幣二枚，一硬幣的結果（正面或反面）不受另一枚硬幣的影響（正面或反面）。換句話說，如果第二件事件的結果並不受第一件事件結果的影響，則二事件為獨立。

A、B為獨立事件，若且唯若 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

17

條件機率

- 條件機率（conditional probability）是指在某一特定事件B已發生的條件下，另一事件A發生的機率，記為$P(A|B)$。
- 條件機率計算的公式如下：
  - $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$
  - 若A、B為獨立事件

    $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = P(A)P(B) / P(B) == P(A)$

18

例題

箱子中包含有100個蘋果，其中已知三個壞的。依序選出兩個蘋果，則連續選出兩個壞蘋果的機率為何？

交集規則(乘法原理)

- P(A∩B)＝P(A|B)．P(B)=P(B|A)．P(A)
- P(A∩B)＝P(A)P(B) ，若且唯若 A、B為獨立事件

例題

擲硬幣2枚，兩枚皆為反面的機率為何？

例題

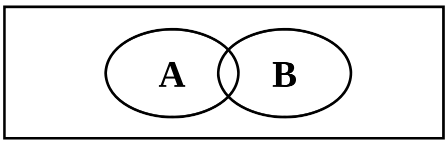
令 A 為投擲一骰子出現奇數點的事件，B 為投擲一骰子出現至少 5 點的事件，請問 A、B 是否為獨立事件？

令 A 為投擲一骰子出現偶數點的事件，B 為投擲一骰子出現 6 點的事件，請問 A、B 是否為獨立事件？

21

總合機率法則(全機率法則)

1. 總合機率法則
- 事件A發生的機率正等於A、B同時發生的機率加上A發生而B不發生的機率
- 總合機率法則（基本型）
  - $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)=P(A|B)P(B)+P(A|B^c)\,P(B^c)$



22

總合機率法則

- 若$B_1, B_2, \ldots, B_n$為樣本空間S中n個彼此互斥的事件，且$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$，則我們稱$\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$為樣本空間S的一個分割。
- 將樣本空間S分割為n個事件$B_1, B_2, \ldots, B_n$，則可以得到下列之總和機率法則：總合機率法則(一般型)：

$$P(A) = \Sigma\, P(A \cap B_i) = \Sigma\, P(A|B_i)P(B_i)$$

$Ex: n = 3$

$$A = A \cap S = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$
$$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

23

例題

某不動產經紀人試圖要賣掉手上一批房地產，根據過去的經驗，他相信若未來半年經濟情況改善，這批房地產售出的機率為 0.8；否則售出機率將只有 0.6。而根據最新的預測顯示未來半年經濟情況改善的機率為 0.6，請問這批房地產順利售出的機率為何？

A:出售；B:改善；B^c:沒改善

$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)\, P(B^c)$

24

貝氏定理

- 兩個事件A和B的發生機率分別為P(A)和P(B)，若P(A)為事前機率，且可得知額外資訊P(B|A)，依據貝氏定理可求得事後機率P(A|B)，其過程如下：

  P(A|B)＝P(A∩B)/P(B)＝P(A)．P(B|A)/P(B)

- 定理：兩事件之貝氏定理
  - 設A、B為任意兩個事件，則

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)}$$

貝氏定理

- 定理：三事件之貝氏定理

設 A_1, A_2, A_3 為互斥完全事件，即

$(1) A_1 \cap A_2 = \phi, \quad A_1 \cap A_3 = \phi, \quad A_2 \cap A_3 = \phi$

$(2) \mathrm{P}(\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_3) = 1$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)}$$

例題

根據統計，今年某大學修習經濟學這一門課的學生中，大一、大二、大三及大四學生所佔之比例分為 35%、30%、20%及 15%，而由教務處的紀錄得知，修該門課之大一生有 20%得到 A 的成績，且大二、大三、大四得 A 的比例分為 30%、35%、40%。今已知某學生的經濟學成績為 A，請問該學生為大三生之機率為何？

27

習 題 1

郵政局有2輛服務車常常拋錨。如果第一輛車可使用的機率為0.75，第二輛可使用的機率為0.50，兩者皆可使用的機率為0.3，那麼2輛車都不能使用的機率為何？

28

習題 2

徐老師已教授基礎統計學多年。她知道有70%的學生會寫完指派問題，他也決定了在做功課的學生中有90%會通過考試。在那些不做功課的學生中有50%會通過考試。小香上學期修了徐老師的統計學而且通過考試。試問他有寫功課的機率為何？

習題 3

研發新口香糖來幫助病人戒煙。如果吃口香糖的人中有60%戒煙成功，在使用口香糖組成的10人群組中，至少有一個人成功戒煙的機率為若干？

習題 4

汽車保險公司將駕駛人分成良好、中等、不良風險。申請者被歸於這三類的機率為30%、50%、20%。良好駕駛人發生意外的機率為0.01；中等駕駛人發生意外的機率為0.08；不良駕駛發生意外的機率則為0.8。公司賣保險給老包，而他出了意外。老包為下列駕駛人的機率為若干？

(1)良好駕駛人。(2)中等駕駛人。 (3)不良駕駛人。

習題 5

SPA會員的調查，調查記錄其性別與年齡。下表為一總結。

	35歲以下	35至54歲之間	54歲以上	總計
男	27	90	26	143
女	20	25	10	55
總數	47	115	36	198

若你隨機選出一會員，下列各項之機率為若干？

(1)男性。

(2)年齡介於35至54歲之間的會員。

(3)年齡介於35至54歲之間的男性。

(4)年齡大於54歲的女性。

(5)男性或年齡大於54歲的會員。

(6)女性或年齡大於54歲的會員。

(7)已知年齡小於35歲，其為男性的機率。

(8)已知年齡大於54歲，其為男性的機率。

33

(9)已知為男性，其年齡大於54歲的機率。

(10)已知為女性，其年齡大於54歲的機率。

(11)「男性」及「年齡介於35至54歲之間」的事件為獨立事件嗎？

(12)「女性」及「年齡大於54歲」的事件為獨立事件嗎？

(13)「男性」及「年齡大於 54 歲」的事件為互斥事件嗎？

(14)「女性」及「男性」的事件為互斥事件嗎？

34

習題 6

大大公司有 A、B 兩條生產線，已知兩生產線之產量分佔此公司之 60%及 40%，且已知 A、B 兩生產線之不良率分為 0.05 及 0.1，請問

(1)此公司產出不良品之機率為何？

(2)不良品中為 A 生產線所生產之機率為何？