謝比雪夫定理

- 謝比雪夫定理（Tchebysheff's theorem）：任何一組量測值的資料組中，至少有$(1-(1/k^2))$比率的量測值，會落在距離平均數k個標準差以內，此處之k大於等於1。
- 標準差與謝比雪夫定理對應的比率，如下表所示

標準差(k)	區間		謝比雪夫定理比率 $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
	母體	樣本	
1	$\mu \pm \sigma$	$\bar{x} \pm s$	至少 0%
2	$\mu \pm 2\sigma$	$\bar{x} \pm 2s$	至少 3/4＝75%
3	$\mu \pm 3\sigma$	$\bar{x} \pm 3s$	至少 8/9＝89%

- 兩個及三個標準差的部份，提供了有效的方式來說明量測值落於某特定區間之比率

例題 4-12

樣本數$n=45$的某班英文考試成績，其平均值和變異數分別為65及49，試用謝比雪夫定理來說明量測值落在2個及3個標準差的比例。

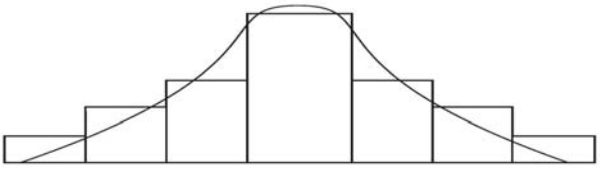
已知$\bar{x}=65$　$\because s^2=49$，$\therefore s=7$

標準差(k)	區間	謝比雪夫定理比率 $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
2	65－2(7)～65＋2(7)＝51～79	至少 3/4＝75%
3	65－3(7)～65＋3(7)＝44～86	至少 8/9＝89%

由以上計算，可以說在 45 個學生中，至少有 75%的學生成績落在 51 到 79 分間，至少 89%的學生成績會落在 44 到 86 分間。

經驗法則

- 經驗法則：已知量測組近似鐘形分配，其區間在
  - （$\mu \pm \sigma$）將包含約68%的量測值
  - （$\mu \pm 2\sigma$）將包含約95%的量測值
  - （$\mu \pm 3\sigma$）將包含幾乎100%的量測值



  - 資料組的相對次數直方圖愈接近鐘形（bell-sharped）分配，法則愈正確。鐘形分配通常稱為常態分配

例題 4-13

為了研究某項特定操作所需時間，抽樣對 100 位工作者進行量測完成此項操作所需要的時間，此項操作所需要的時間平均值及標準差為 8.8 分鐘及 1.3 分鐘，試以經驗法則來估算樣本資料分配的比例？

標準差(s)	區間	經驗法則
1	$8.8-1(1.3)\sim 8.8+1(1.3)=7.5\sim 10.1$	約 68%
2	$8.8-2(1.3)\sim 8.8+2(1.3)=6.2\sim 11.4$	約 95%
3	$8.8-3(1.3)\sim 8.8+3(1.3)=4.9\sim 12.7$	約 100%

根據經驗法則，可以估算大約 68%的工作者其操作時間會落在 7.5 到 10.1 分鐘的區間，大約 95%的工作者其操作時間量落在 6.2 到 11.4 分鐘的區間，幾乎全部的工作者其操作時間會落在 4.9 到 12.7 分鐘的區間。

標準差的檢查

- 由謝比雪夫定理與經驗法則，大部份的量測值會落在距離平均數兩倍標準差的區間內。
  - 謝比雪夫定理：（$\mu \pm 2\sigma$）將包含至少75%的量測值。
    (k=2 => $1-(1/k^2)=3/4=75\%$)
  - 經驗法則(近似鐘形分配)：（$\mu \pm 2\sigma$）將包含約95%的量測值。
- 因此，資料組的全距（R），大約等於四倍標準差。
  (k=4 => 1-(1/k2)=15/16=93.75%)

$$\because R=4s \quad \therefore s=\frac{R}{4} \text{或} \because R=4\sigma \quad \therefore \sigma=\frac{R}{4}$$

5

習 題 6

已知n=15之量測組為7,4,3,6,2,7,3,5,1,7,5,2,5,6,4，試回答下列問題

(1)利用全距估計s值的近似值？

(2)計算s之值，將計算結果與(1)中之近似值比較，是否很接近？

(3)運用謝比雪夫定理描述資料分配比率是否適當？為什麼？

(4)運用經驗法則描述資料分配比率是否適當？為什麼？

6