6-2遞迴關係的解

建立遞迴關係式－例1

設 S 包含 2^n 個元素，$n \geq 1$。將 S 中之元素一對對的做比較，一共要多少個比較才可以決定 S 中之最大及最小元素？

令 a_n 表示在一個含有 2^n 個元素的集合中，為了產生最大值與最小值所需的比較次數。設 S 有 2^{n+1} 個元素（即 $2^n + 2^n$ 個元素）；設 S_1 含有 2^n 個 S 中的元素，而 S_2 含有另外的 2^n 個元素。因此，在 S_1 集合中需要 a_n 次比較才能產生最大值和最小值，在 S_2 中亦然。而要產生 S 之最大值，需考慮將 S_1 中的最大值和 S_2 中的最大值再比較一次；同理可得 S 中的最小值。因此，含有 2^{n+1} 個元素的集合需要 $a_n + a_n + 1 + 1$ 次比較，方能產生最大及最小值。故得

$$a_{n+1} = 2a_n + 2, \qquad (7)$$

(7)式對每一個自然數 n 皆為真。

假設 $S = S_1 \cup S_2,\ S_1 \cap S_2 = \phi,$

$|S| = 2^{n+1}, |S_1| = 2^n, |S_2| = 2^n$

$\Rightarrow a_{n+1} = a_n + a_n + 1 + 1 = 2a_n + 2$

解遞迴關係式

$$a_{n+1} = 2a_n + 2, \quad (7)$$

有了遞迴關係式(7)並不夠，我們想找出一個直接可求 a_n 的式子來，故可更進一步分析(7)式:

$a_1 = 1,$

$a_2 = 2 \cdot 1 + 2 = 2^1 + 2^1,$

$a_3 = 2(2^1 + 2^1) + 2 = 2^2 + 2^2 + 2^1,$

$a_4 = 2(2^2 + 2^2 + 2^1) + 2 = 2^3 + 2^3 + 2^2 + 2^1,$

$$\begin{aligned} a_n &= 2^{n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1 \\ &= 2^{n-1} + (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^1) \\ &= 2^{n-1} + 2(2^{n-1} - 1) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2,\ n \geq 2。 \quad (8) \end{aligned}$$

因為 $a_1 = 1 = 3 \cdot 2^{1-1} - 2$，故(8)式對 $n = 1$ 時，亦成立。

$\dfrac{\overset{首項}{a_1}(1-r^{\overset{項數}{n}})}{1-\underset{公比}{r}}$ 當 $r \neq 1$

因此，得 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2,\ n \geq 1$。 (9)

即對於給定的自然數 n，包含 2^n 個元素的集合，需要 $3 \cdot 2^{n-1} - 2$ 次比較，才能產生最大值與最小值。

建立遞迴關係式 – 例2

設集合 A 中有 n 個元素，用 $P(A)$ 表示集合 A 的所有部份集合所成的集合。試決定一個遞迴關係及起始條件來描述 $P(A)$ 之元素個數。

我們用 $|B|$ 來表示集合 B 之元素個數。

令 $a_n = |P(A)|$，此處的 $|A| = n$。為了便於說明，含有 n 元素的集合用 $A(n)$ 表示。所以 $a_n = |P(A(n))|,\ n \geq 0$。

則 $a_0 = 1$，即 $P(A(0)) = \{\phi\}$。$a_1 = 2$，即 $P(A(1)) = \{\phi, A(1)\}$。

$a_2 = 4$，設 $A(2) = \{e_1, e_2\}$。即 $P(A(2)) = \{\phi, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_1, e_2\}\}$

$a_3 = 8$，設 $A(3) = \{e_1, e_2, e_3\}$，即 $P(A(3)) = \{\phi, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_1, e_2\}, \{e_3\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_3\}\}$。

從 $P(A(2))$ 和 $P(A(3))$ 可以看出 $P(A(3))$ 中的元素可以分成兩類，其中一類是 $P(A(2))$ 元素，另一類每個元素皆含有 e_3 元素之 $A(3)$ 的部份集合，可看成把 $P(A(2))$ 之各元素中加入 e_3，故此類部份集合的數與 $P(A(2))$ 的元素個數相同。因此 $a_3 = a_2 + a_2 = 2 \cdot a_2$。

建立遞迴關係式 – 例2

推廣來說，設 $A(n+1)$ 含某元素 a，故其部份集合可分為兩類，一類是完全不含 a 之元素，另一類是每個元素皆含 a。也就是說一類是 $P(A(n))$ 的元素，另一類則將 $P(A(n))$ 之每個元素中加入 a，故此兩類之元素各有 a_n 個。因此 $a_{n+1}=2a_n$，$n \geq 0$，$a_0=1$。由上面二式可以得到 $a_n=2^n$，$n \geq 0$

$$a_{n+1}=2a_n, n \geq 0, a_0=1$$

$$a_1=2a_0=2,\quad a_2=2a_1=2^2,\quad a_3=2a_2=2^3,\quad \cdots,\quad a_n=2^n, n \geq 0$$

上兩例中我們找出了遞迴關係式的解，這裡 a_n 都是 n 的函數，且和它前面的項數無關，不需由 a_0 求起就可以求出任何一個 a_n 來，這種解稱為該遞迴式的**一般解** (general solution)。

5

超位置原理

本節中我們介紹一個對於線性常係數遞迴關係式的求解十分重要的性質及其應用，那就是

定理 1　超位置原理 (Superposition Principle)

設 $\{a_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ 為 $a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}=f_1(n)$ 之一解，而 $\{a_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ 為 $a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots+c_ka_{n-k}=f_2(n)$ 之一解，則 $\{\alpha a_n^{(1)}+\beta a_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$ 為 $a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdot+c_ka_{n-k}=\alpha\cdot f_1(n)+\beta\cdot f_2(n)$ 之一解，其中 α，β 為任意兩常數。

6

定理

設 $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \cdots$ 和 $\{a_n^{(m)}\}$ 為齊次 k 階線性常係數遞迴關係式

$$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0 \tag{14}$$

的 m 個解，則給定任意m 個常數 $d_1, d_2, \cdots, d_m$，數列 $\{d_1 a_1^{(1)} + d_2 a_n^{(2)} + \cdots + d_m a_n^{(m)}\}_{n=0}^{\infty}$ 為(14)之一解。

上面這個性質建議了一個非常好的解齊次線性常係數遞迴關係式的方法，稱為特徵根方法 (The method of characteristic roots)。說明如下：

設 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ 為(14)式之一解，則

$$\alpha^n + c_1\alpha^{n-1} + c_2\alpha^{n-2} + \cdots + c_k\alpha^{n-k} = 0。 \tag{15}$$

當然 $\alpha = 0$ 時，即零數列為(14)式之一解，除此之外，$\alpha \neq 0$ 的情況下，(15)式和下列(16)式

特徵根方法

$$\alpha^{n-k}[\alpha^k + c_1\alpha^{k-1} + c_2\alpha^{k-2} + \cdots + c_k] = 0 \tag{16}$$

是等價的。因此

$$\alpha^k + c_1\alpha^{k-1} + c_2\alpha^{k-2} + \cdots + c_{k-1}\alpha + c_k = 0 \tag{17}$$

的根 (root)，α，所造出的數列 $\{\alpha^n\}_{n=0}^{\infty}$ 即為(14)式的一解。

所以(17)式稱為(14)式的特徵方程式 (characteristic equation)，而 $f(x) = x^k + c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \cdots + c_k$ 稱為(14)式的特徵多項式 (characteristic polynomial)；而此多項式的根，稱為特徵根 (characteristic root)。

假如(17)式有 k 個相異根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$，則(14)式可以有 k 個不同解 $\{\alpha_i^n\}_{n=0}^{\infty}, i = 1, 2, \cdots, k$。於是由超位置原理知

$$\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{d_1\alpha_1^n + d_2\alpha_2^n + \cdots + d_k\alpha_k^n\}_{n=0}^{\infty}$$

皆是(14)式的解，其中 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 為 k 個任意常數。

二階齊次遞迴關係式(相異特徵根)

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$

設$a_n = \alpha^n$,

$\alpha^n = 5\alpha^{n-1} - 6\alpha^{n-2} \Rightarrow \alpha^{n-2}(\alpha^2 - 5\alpha + 6) = 0 \Rightarrow (\alpha^2 - 5\alpha + 6) = 0$ (特徵方程式)

$\Rightarrow (\alpha - 2)(\alpha - 3) = 0 \Rightarrow \alpha = 2,3$(相異特徵根)

一般解 $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n, n \geq 0$

滿足起始條件 $\begin{cases} c_1 2^0 + c_2 3^0 = a_0 \\ c_1 2^1 + c_2 3^1 = a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 2c_1 + 3c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \end{cases}$

$\Rightarrow a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n, n \geq 0$

9

二階齊次遞迴關係式(相同特徵根)

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$

設$a_n = \alpha^n$,

$\alpha^n = 4\alpha^{n-1} - 4\alpha^{n-2} \Rightarrow \alpha^{n-2}(\alpha^2 - 4\alpha + 4) = 0 \Rightarrow (\alpha^2 - 4\alpha + 4) = 0$ (特徵方程式)

$\Rightarrow (\alpha - 2)^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 2,2$(相同特徵根)

一般解 $a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n, n \geq 0$

滿足起始條件 $\begin{cases} c_1 2^0 + c_2 \cdot 0 \cdot 2^0 = a_0 \\ c_1 2^1 + c_2 \cdot 1 \cdot 2^1 = a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + 0 = 1 \\ 2c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow a_n = 2^n - n \cdot 2^n, n \geq 0$

10

說明相同特徵根的線性獨立解

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, n \geq 2$

設 $a_n = \alpha^n$,

$\alpha^n = 4\alpha^{n-1} - 4\alpha^{n-2} \Rightarrow \alpha^n - 4\alpha^{n-1} + 4\alpha^{n-2} = 0$

對 α 微分, $n\alpha^{n-1} - 4(n-1)\alpha^{n-2} + 4(n-2)\alpha^{n-3} = 0$

乘 α, $\underbrace{n\alpha^n}_{a_n} - 4\underbrace{(n-1)\alpha^{n-1}}_{a_{n-1}} + 4\underbrace{(n-2)\alpha^{n-2}}_{a_{n-2}} = 0$

$\Rightarrow a_n = n\alpha^n$ 為 $a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 0$ 的解

11

二階非齊次遞迴關係式(相異特徵根)

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4n, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$

(1)齊次解, 設 $a_n^{(h)} = \alpha^n$,

$\alpha^n = 5\alpha^{n-1} - 6\alpha^{n-2} \Rightarrow \alpha^{n-2}(\alpha^2 - 5\alpha + 6) = 0 \Rightarrow (\alpha^2 - 5\alpha + 6) = 0$ (特徵方程式)

$\Rightarrow (\alpha-2)(\alpha-3) = 0 \Rightarrow \alpha = 2,3$(相異特徵根)

$\Rightarrow$ 齊次解 $a_n^{(h)} = c_1 2^n + c_2 3^n, n \geq 0$

(2)特殊解, 設 $a_n^{(p)} = b \cdot n + c$,

$bn + c = 5(b(n-1)+c) - 6(b(n-2)+c) + 4n$

$\Rightarrow bn + c = 5bn - 5b + 5c - 6bn + 12b - 6c + 4n$

$\Rightarrow 2bn - 7b + 2c = 4n \Rightarrow (2b-4)n - 7b + 2c = 0, n \geq 2$

$\Rightarrow 2b - 4 = 0, -7b + 2c = 0 \Rightarrow b = 2, c = 7$

$\Rightarrow$ 特殊解, 設 $a_n^{(p)} = 2n + 7, n \geq 2$

12

二階非齊次遞迴關係式(相異特徵根)

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4n, n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$

(3)一般解, $a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 2^n + c_1 3^n + 2n + 7,$

滿足起始條件

$$\begin{cases} a_0^{(g)} = c_1 2^0 + c_2 3^0 + 2 \cdot 0 + 7 = 1 \\ a_n^{(g)} = c_1 2^1 + c_2 3^1 + 2 \cdot 1 + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = -6 \\ 2c_1 + 3c_2 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -9 \\ c_2 = 3 \end{cases},$$

$\Rightarrow$ 一般解, $a_n^{(g)} = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = -9 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n + 2n + 7, n \geq 0$

驗算：

$a_2 = -9 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2 + 7 = -36 + 27 + 4 + 7 = 2;\quad a_2 = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 2$

$a_3 = -9 \cdot 2^3 + 3 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 7 = -72 + 81 + 6 + 7 = 22;\quad a_3 = 5 \cdot 2 - 6 \cdot 0 + 4 \cdot 3 = 22$

13

隨堂練習:1

設 S 包含 2^n 個元素，$n \geq 1$。將 S 中之元素一對對的做比較，一共要多少個比較才可以決定 S 中之最大及最小元素?

令 a_n 表示在一個含有 2^n 個元素的集合中，為了產生最大值與最小值所需的比較次數。 $a_{n+1} = 2a_n + 2$，對每一個自然數 n 皆為真。

14

隨堂練習:2

(1) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 1$

(2) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2n, n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 1$

(3) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 1$

(4) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 2, n \geq 2, a_0 = 0, a_1 = 1$