第六章:遞迴關係

6-1遞迴關係

6-2遞迴關係的解

1

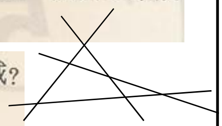
6-1遞迴關係

2

遞迴關係－極為有效的計數方法

本節中我們要介紹**遞迴關係** (recurrence relation) 的觀念，它是一種極為有效的計數方法，因為在計數時，我們常常利用個數為 n 之結果建構出個數為 $n+1$ 時的結果，這就是遞迴關係的概念了。我們更具體地舉一個例子來說明：

滿足下列兩條件的 n 條直線可以把一平面分割成多少個區域?
(a) 任兩直線恰有一交點，(b) 沒有三直線交於同一點。



設 a_n 表示 n 條直線所能分割成最多的區域個數，顯然地

$a_0 = \quad$ $a_1 =$

$a_2 = a_1 + 2$ $\quad a_3 = a_2 + 3$

$a_4 = a_3 + 4$

$a_0 = 1, a_1 = 2$ (1) 又可求得 $a_n = a_{n-1} + n,\ n \geq 1$ (2)

(2)式的建立是因為假設 $n-1$ 條直線可以將平面分割為 a_{n-1} 個區域，而第 n 條線又與前 $n-1$ 條各有一個交點，於是這 $n-1$ 個交點便把第 n 條線分為 n 段，而每一段又把其所在之原來區域一分為二，故比 a_{n-1} 增加了 n 個區域而得(2)式。

3

遞迴關係式

$a_0 = 1, a_1 = 2$ (1) $\qquad a_n = a_{n-1} + n,\ n \geq 1$ (2)

上例中的(2)式就稱為一個**遞迴關係式**；因為 a_n 只牽涉到它的前一項 a_{n-1}，故稱為**一階** (first order) 遞迴關係式，若是牽涉到再前一項，a_{n-2}，則可稱**二階** (second order) 遞迴關係式，而高階之遞迴關係式可依此類推。另外，(2)式中 a_n 及 a_{n-1} 項之次數為 1，故稱為**線性** (linear) 的遞迴關係式，否則就稱為**非線性** (nonlinear)。還有(2)式中尚有一項非 a_n 型的 "n" 存在，這種遞迴關係式稱為**非齊次** (nonhomogeneous) 的，若無這類型的項，就稱為**齊次** (homogeneous)。所以，(2)式最完整的全名應該是**非齊次一階線性遞迴關係式** (nonhomogeneous first-order linear recurrence relation)。而滿足(2)式的一個數列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 則稱為(2)式的**解** (solution)，我們通常希望 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 滿足遞迴關係(2)外，並要求滿足(1)式，即所謂的**起始條件** (initial condition)。

4

建立遞迴關係式

設 $S_n = \{1,2,3,4,5,\cdots,n\}$，試求，不包含兩個差值為1的自然數之 S_n 的部份集合個數，a_n，所對應的遞迴關係。

設 a_n 表集合 $S_n = \{1,2,\cdots,n\}$ 中不含兩元素其差值為 1 之所有部份集合的個數。因 $S_0 = \phi$，故 $a_0 = 1$。又 $S_1 = \{1\}$，其所有部份集合皆不含兩個元素，故 $a_1 = 2$，可得起始條件 $a_0 = 1, a_1 = 2$。 (3)

對 $n \geq 2$ 而言，S_n 中此類部分集合可分為兩類:

(a) 包含元素 n:

此類部份集合必不能包含元素 $n-1$，因此可視為 S_{n-2} 中不含兩差值為 1 之元素的部份集合再加入 n 這個元素，所以其個數為a_{n-2}。

(b) 不包含元素 n:

這類部份集合也就是 S_{n-1} 的部份集合，故個數為 a_{n-1}。因此，可得遞迴關係式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，$n \geq 2$。 ❑(4)

k階線性遞迴關係式

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，$n \geq 2$。 (4)

遞迴關係式(4)就是一個齊次二階線性遞迴關係式。且(4)式中各 a_k 項的係數皆為常數 1。我們稱一個 k 階線性常係數遞迴關係式其通式如

$$c_0a_n + c_1a_{n-1} + \cdots\cdots + c_ka_{n-k} = f(n), \tag{5}$$

其中 $c_0, c_1, \cdots, c_k$ 為常數，且 $c_0 \neq 0, c_k \neq 0$。若 $f(n) = 0$，則(5)式為齊次的遞迴關係式，而 $f(n) \neq 0$ 時則稱為**非齊次**。若不限定為常係數時，**k 階線性遞迴關係式**其通式可表示為

$$a_n + g_1(n)a_{n-1} + \cdots\cdots + g_k(n)a_{n-k} = f(n), \tag{6}$$

其中 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 和 f 皆為定義在 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ 之函數，且 g_k 不恆為 0。

遞迴關係式 - 完整名稱

寫出下列各遞迴關係式之完整名稱:

(a) $3a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2} = n^2 + 5,\ n \geq 2$

非齊次二階線性常係數遞迴關係式。

(b) $3a_n - 5a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0,\ n \geq 2$

(c) $a_n - n \cdot a_{n-1} = (-1)^n,\ n \geq 1$

(d) $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1,\ n \geq 1$

7

隨堂練習:1

滿足下列兩條件的 n 條直線可以把一平面分割成多少個區域?
(a) 任兩直線恰有一交點, (b) 沒有三直線交於同一點。

設 a_n 表示 n 條直線所能分割成最多的區域個數,
可求得 $a_n = a_{n-1} + n,\ n \geq 1,\ a_0 = 1, a_1 = 2$ 試求 a_n

8

隨堂練習:2

設 $S_n = \{1,2,3,4,5,\cdots,n\}$，試求，不包含兩個差值為1 的自然數之 S_n 的部份集合個數，a_n，所對應的遞迴關係。

設 a_n 表集合 $S_n = \{1,2,\cdots,n\}$ 中不含兩元素其差值為 1 之所有部份集合的個數。

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，$n \geq 2$。起始條件 $a_0 = 1, a_1 = 2$。試求 a_n