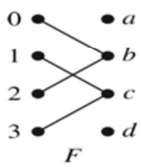
4-4鴿洞原理

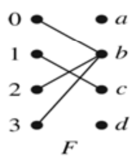
多對一函數

令 $F: X \to Y$ 為一個函數。令 $k \in \mathbb{N}$，若對每一個 $y \in Y$，最多有 k 個不同的 $x(x \in X)$ 有 $F(x)=y$，則 F 便稱為**多對一** (k to 1)。另外，對每一個 $y \in Y$，

$$|\{x \in X : F(x)=y\}| \le k$$

(a) 令 $F : \{0, 1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ (b) 令 $F : \{0, 1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$





天花板、地板函數

天花板 (ceiling) 函數

$\lceil x \rceil$: 大於等於 x 的最小整數

$\lceil 2 \rceil =$

$\lceil 2.3 \rceil =$

$\lceil -2.3 \rceil =$

$\left\lceil -\frac{8}{3} \right\rceil =$

地板 (floor) 函數

$\lfloor x \rfloor$: 小於等於 x 的最大整數

$\lfloor 2 \rfloor =$

$\lfloor 2.3 \rfloor =$

$\lfloor -2.3 \rfloor =$

$\left\lfloor -\frac{8}{3} \right\rfloor =$

3

鴿洞原理

假定 m 隻鴿子佔據了 n 個巢穴，但 $m>n$。

則至少有一個巢穴裡住著(至少)2 隻鴿子。

$m=7$ $\quad n=5$

$m=11$ $\quad n=5$

$m=15$ $\quad n=5$

$m=22$ $\quad n=5$

m $\quad n$

4

一般化鴿洞原理

令 $F: X \to Y$ 為 onto 且 $|X| = m$ 同時 $|Y| = n$。

則存在一個 $y \in Y$，其為至少 $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ 個 X 元素的映像。

證明 ▶▶▶

假定不存在一個 $y(y \in Y)$ 為超過 $\lceil \frac{m}{n} \rceil - 1$ 個 X 元素的映像。

則 X 中的元素個數最多為

$$m \leq n\left(\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1\right) < n\left(\left(\frac{m}{n}\right) + 1 - 1\right) = m$$

上式矛盾，所以得證。

5

鴿洞原理 – 例子1

假定一個班級有 89 個學生，則其中至少有幾位學生的生日必在同一月份？

6

鴿洞原理 – 例子2

設定一個教室裡有 367 個人。
(a) 至少有　個人生日同一天。
(b) 至少有　人的生日為同一月份(但可能為不同年)。
(c) 若其中沒有人超過 121 歲，則至少有　個人同歲數。

7

隨堂練習:1

在巴巴卡拉大學裡，每星期有 45 段時間可供規劃課程，且已知共有780 門課規劃出來。請依據一般化的鴿洞原理來確定，在這 45 段時間中至少需要多少教室來上這 780 門課？

8

隨堂練習:2

一個人有 10 雙黑襪子與 11 雙藍襪子，混雜地置於抽屜中。猶帶著睡意，該人摸索著抽屜要找出一雙同色的襪子來穿，則請問一次得選幾隻襪子使其可確定有拿到至少兩隻同色的襪子？而需選幾次才能確知有拿到一雙藍色襪子？

9