4-3布爾函數

1

布爾(布林)代數運算

布爾代數提供在集合{0, 1}上的運算與規則。電子和光學上的開關設備，可以透過布爾代數的集合與規則來研究。在布爾代數中，最常用的三種運算是補數、布爾和以及布爾積。元素的**補數**（**complement**）記號是在元素上方畫上橫線，定義為

$$\bar{0}=1 \text{ 和 } \bar{1}=0$$

布爾和用符號 + 或 *OR* 代表，運算值如下：

$1+1=1,\quad 1+0=1,\quad 0+1=1,\quad 0+0=0.$

布爾積用符號 · 或 *AND* 代表，運算值如下：

$1\cdot 1=1,\quad 1\cdot 0=0,\quad 0\cdot 1=0,\quad 0\cdot 0=0.$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

布爾運算的優先順序為：除非使用括號，補數先於布爾積，再先於布爾和。

2

布爾代數運算 – 例子

(1) 求出 $1\cdot 0+\overline{(0+1)}$ 的值

(2) 求出 $\overline{\overline{1\cdot 1}+1+0\cdot 1}$ 的值

3

布爾代數運算與邏輯運算

補數、布爾和及布爾積分別對應於邏輯運算符號¬、∨、∧，

而 0 對應於 **F**（假），1 對應於 **T**（真）。

布爾代數中的等號可以直接翻譯成複合命題的等式，而且反之亦然。

將等式 $1\cdot 0+\overline{(0+1)}=0$ 翻譯成邏輯等式。

將邏輯等式 $(\mathbf{T}\wedge\mathbf{T})\vee\neg\mathbf{F}\equiv\mathbf{T}$ 翻譯成布爾代數中的等式。

4

布爾函數

令 $B = \{0, 1\}$，則 $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B$，當 $1 \leq i \leq n\}$ 是所有由 0 或 1 組成之 n 元組的集合。從 B^n 對應到 B 的函數稱為 **n 度布爾函數 (Boolean function of degree n)**。

由有序二元布爾變數對應至 $\{0, 1\}$ 的函數 $F(x, y) = x\overline{y}$，是一個二度布爾函數，其對應值分別為

$F(1, 1) =$ ，$F(1, 0) =$ ，

$F(0, 1) =$ 以及 $F(0, 0) =$ 。

5

計算布爾函數值

計算由 $F(x, y, z) = xy + \overline{z}$ 表達的布爾函數值。

x	y	z	xy	$\overline{z}$	$F(x, y, z) = xy + \overline{z}$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

6

布爾函數－相等

n 變數的布爾函數 F 和 G 相等，若且唯若對 B 中任意的 $b_1, b_2, \ldots, b_n$，$F(b_1, b_2, \ldots, b_n) = G(b_1, b_2, \ldots, b_n)$皆成立。兩個不同的布爾表式代表同一個函數時，我們稱此兩個表式**相等（equivalent）**，

例如布爾表式 xy、$xy + 0$ 和 $xy \cdot 1$ 皆相等。

7

證明布爾等式

證明分配律 $x(y + z) = xy + xz$ 是成立的。

x	y	z	$y+z$	xy	xz	$x(y+z)$	$xy+xz$
1	1	1					
1	1	0					
1	0	1					
1	0	0					
0	1	1					
0	1	0					
0	0	1					
0	0	0					

8

求布爾表式

在給定布爾函數值的情況下，如何尋找能夠代表此函數的布爾表式？

求出表達函數 $F(x, y, z)$和 $G(x, y, z)$的布爾表式，其函數值見表 1。

表 1

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

$F(x, y, z) =$

$G(x, y, z) =$

這種表達布爾函數稱為

積之和展開式（sum-of-products expansion）

或析取範式（disjunctive normal form）。

9

求布爾表式 - DNF

求出函數 $F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$ 的積之和展開式。

x	y	z	$x+y$	$\bar{z}$	$(x+y)\bar{z}$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

$F(x, y, z) =$

10

隨堂練習:1

請找出下列函數的析取正規型式 (DNF) (2005 年政大資訊所入學考)

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

根據上表，我們得到布林函數的積之和 (DNF) 爲

$f(x, y, z) =$

11

隨堂練習:2

布林函數 $x \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ 的正規 CNF 是哪個？(2004 年台科大資訊所入學考)

(1) $(x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})$

(2) $(\overline{x} \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})$

(3) $(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$

(4) $(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)$

(5) $(x \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)$

12

隨堂練習:2

$x \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ 真值表如下所示：

x	y	z	$x \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$x \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} =$

13