

第四章:函數

4-1 函數基本定義

4-2 加密解密函數

4-3 布爾函數

4-4 鴿洞原理

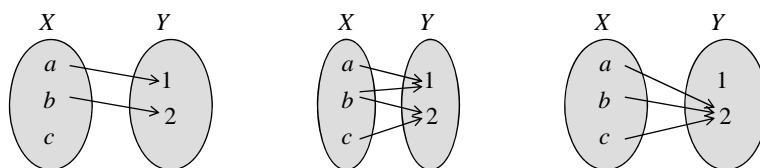
1

4-1 函數基本定義

2

函數定義

令 X 與 Y 為集合。一個定義域 (domain) 為 X 、對應域 (codomain) 為 Y 的函數 (function) F ，即為一個 $X \times Y$ 的子集，其對每一個 $x \in X$ ，都有唯一一個 $y \in Y$ 且 $(x, y) \in F$ 。 F 也被稱作從 X 到 Y 的一個函數，常被記作 $F : X \rightarrow Y$ 。

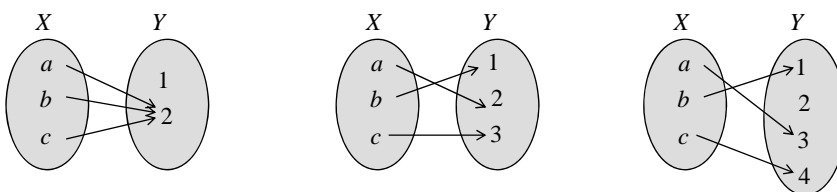


3

一對一函數

令 $F : X \rightarrow Y$ 為一個函數。若對每一個 $y \in Y$ ，最多只存在一個 $x \in X$ 且 $F(x) = y$ ，則 F 便是一對一 (以下記作 1-1) 函數。

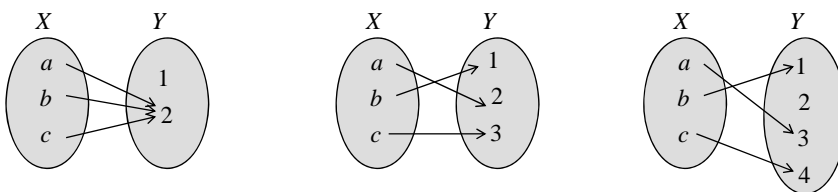
$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X, F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



4

映成函數

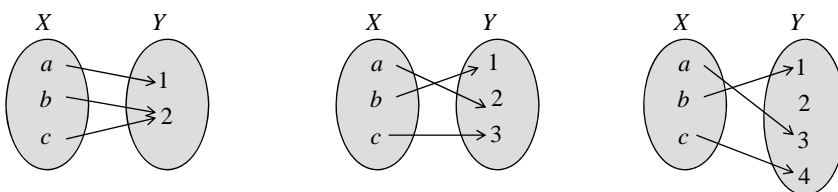
令 $F: X \rightarrow Y$ 為一個函數。若對每一個 $y \in Y$ ，都至少存在一個 $x \in X$ 且 $F(x)=y$ ，則 F 便是映成 (可簡稱為 “onto”) 函數。



5

一對一映成函數

令 $F: X \rightarrow Y$ 為一個函數。若 F 為 1-1 且 onto，則稱 F 為一對一映成 (1-1 correspondence)。



1-1?

onto?

1-1?

onto?

1-1?

onto?

6

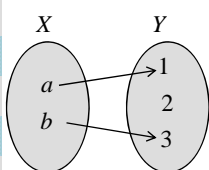
嵌射、映射、對射

函數 $F: X \rightarrow Y$

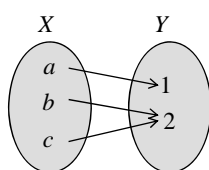
一個 1-1 函數
可稱作**嵌射** (injection)

一個 onto 函數
可被稱作**映射** (surjection)

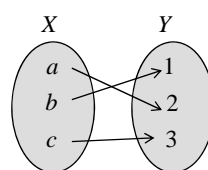
一個 1-1 映成函數
可稱作**對射** (bijection)



$$\Rightarrow |X| \leq |Y|$$



$$\Rightarrow |X| \geq |Y|$$

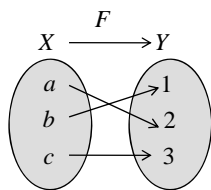


$$\Rightarrow |X| = |Y|$$

7

反函數

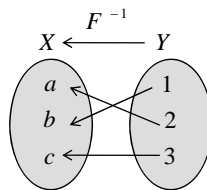
設 $F: X \rightarrow Y$ 為 1-1 映成函數，則存在反函數 $F^{-1}: Y \rightarrow X$



$$F(a) = 2$$

$$F(b) = 1$$

$$F(c) = 3$$



$$F^{-1}(2) = a$$

$$F^{-1}(1) = b$$

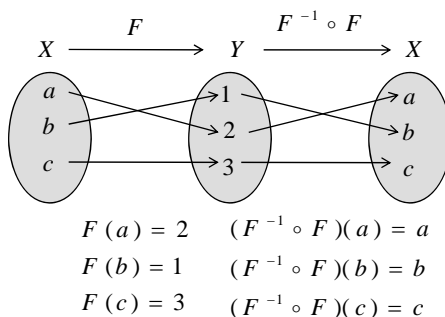
$$F^{-1}(3) = c$$

8

合成函數

令 $F: X \rightarrow Y$ 與 $G: Y \rightarrow Z$ 都為函數。則 G 與 F 的合成 (composition) $(G \circ F)(x) = G(F(x))$ 仍為一個函數。

令 $F: X \rightarrow Y$ 為一個 1-1 映成函數，則 $(F^{-1} \circ F)(x) = x$



9

隨堂練習:1

令 $X = \{-1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{-4, -2, 0, 2\}$, $F: X \rightarrow Y$ 定義為 $F(x) = x^2 - x$

- (1) F 為函數?
- (2) F 為 1-1?
- (3) F 為映成?

10

隨堂練習:2

設 $X = \{1, 2, 3\}$, 列出所有從 X 映至 X 的1-1且映成的函數。

11

隨堂練習:3

判斷下列函數是否為1-1且映成函數。若是，試寫出其反函數。

(1) $f: Z \rightarrow Z, f(x) = 2x+1$

(2) $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x+1$

(3) $f: N \rightarrow N, f(x) = x^2$

(4) $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2$

(5) $f: R^+ \rightarrow R^+, f(x) = x^2$

$$R^+ = \{x \in R \mid x > 0\}$$

12