# 3-4有序關係

1

## 部分有序關係

令 $R$ 為一個非空集合 $X$ 上的二元關係，若 $R$ 具有反射性、反對稱性與傳遞性，則稱 $R$ 是一個部分有序關係 (partial ordering relation)或偏序關係。

令 $U$ 為一個集合，則 $\subseteq$ 為 $U$ 的子集合上的部分有序關係。

(1) 反射性: $\forall u \subseteq U \Rightarrow u \subseteq u$

(2) 反對稱性: $\forall u, v \subseteq U, u \subseteq v$ 且 $u \neq v \Rightarrow v \not\subset u$

(3) 傳遞性: $\forall u, v, w \subseteq U, u \subseteq v$ 且 $v \subseteq w \Rightarrow u \subseteq w$

$\Rightarrow R$ 為部分有序關係。

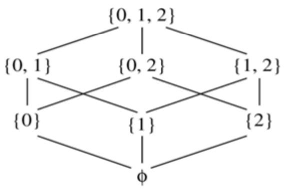
2

# 部分有序 - 例子

令 $U$ 為一個集合，則 $\subseteq$ 為 $U$ 的子集合上的部分有序關係。

設 $U=\{0,1,2\}$，有 8 個子集合

$$\phi,\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}$$




{0, 1, 2}的子集合

3

# 除數關係

「除數」關係： "$x|y$ 若且唯若 $y=k\cdot x$，$k\in\mathbb{N}$"

"|" 關係為 $\mathbb{N}$ 上的部分排序。

反身性： $(1)\ \forall x\in N, x=1\cdot x\Rightarrow x|x$

遞移性： $(2)\ x|y, y|z\Rightarrow y=kx, z=sy, k,s\in N\Rightarrow z=(sk)x\Rightarrow x|z$

反對稱性：$(3)\ x|y, x\neq y\Rightarrow y=kx, k\in N, k\neq 1$

$$\Rightarrow x=\begin{cases}\frac{1}{k}y, k\in N, k\neq 0,1\\ \text{沒有定義}, k=0\end{cases}$$

$$\not\Rightarrow y|x$$

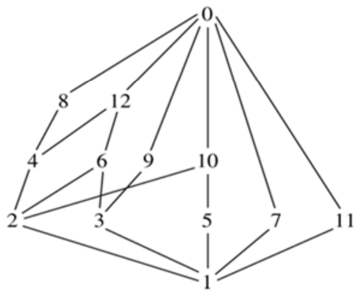
4

# 除數關係 - 例子

將「除數」關係："$x|y$ 若且唯若 $y=k \cdot x$，$k \in \mathbb{N}$"，

用於集合 {0, 1, 2, 3, . . . , 11, 12} 來定義一個部分排序。

用圖顯示其元素與 "|" 是如何相關。




5

# 完全有序關係

令 $R$ 為一個集合 $X$ 上的二元關係，若 $R$ 為一個滿足**三一律** (law of trichotomy) —即對每一個 $x, y \in X$，只會滿足以下其中一種情形：(i) $xRy$；(ii) $x=y$；或(iii) $yRx$。—的傳遞性關係，則稱 $R$ 為 $X$ 上的一個**線性有序關係** (linear ordering)，簡稱線性排序或說是**完全有序關係** (total ordering)。

"<"為 $N$ 的完全有序關係。

(1) 三一律： $\forall x, y \in N \Rightarrow x<y, x=y, y<x$ 三者只有一個成立

(2) 傳遞性： $\forall x, y, z \in N, x<y$ 且 $y<z \Rightarrow x<z$

$\Rightarrow$"<"為 $N$ 的完全有序關係。

6

# 可比較的

若元素 $x, y \in X$ 有 $xRy$ 或 $yRx$ 的性質，則稱 $x, y$ 在 $R$ 中是**可比較的** (comparable)。

令 $U = \{0,1,2\}$, 則 $\subseteq$ 在 $U$ 的子集合上定義部分有序關係。

$U$ 有 8 個子集合：$\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,2,3\}$

$\{0\} \subseteq \{0,1\} \Rightarrow \{0\}$ 與 $\{0,1\}$ 可比較的

$\{0,1\} \subseteq \{0,1,2\} \Rightarrow \{0,1\}$ 與 $\{0,1,2\}$ 可比較的

$\{0,1\} \not\subset \{1,2\} \Rightarrow \{0,1\}$ 與 $\{1,2\}$ 不可比較的

7

# 部分排序與線性排序

(a) 若 $R$ 為集合 $X$ 上的線性排序，則 $R \cup Id_x$ 為一個 $X$ 的部分排序。

(b) 若 $R$ 為集合 $X$ 上的部分排序，則「$R - Id_x$ 為一個 $X$ 的線性排序」若且唯若「對任何 $x, y \in X$，元素 $x$ 與 $y$ 在 $R$ 中為可比較的」。

8

# 有序關係中的最佳元素

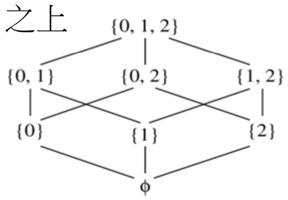
令 $R$ 為集合 $X$ 上的部分排序或線性排序。對 $x, y \in X$，若 $xRy$ 且 $x \neq y$，則稱 $x$ 在 $y$ **之下** (below)，$y$ 在 $x$ **之上** (above)。

令 $U = \{0,1,2\}$, 則 $\subseteq$ 在 $U$ 的子集合上定義部分有序關係。

$\{0\} \subseteq \{0,1\} \Rightarrow \{0\}$ 在 $\{0,1\}$ 之下，$\{0,1\}$ 在 $\{0\}$ 之上

$\{0,1\} \subseteq \{0,1,2\} \Rightarrow \{0,1\}$ 在 $\{0,1,2\}$ 之下

$\{0,1,2\}$ 在 P($U$) 所有其他元素之上




{0, 1, 2}的子集合

9

# 有序關係中的最佳元素

令 $R$ 為一個集合 $X$ 上的部分排序或線性排序。對 $x, y \in X$，

(a) 若不存在 $y \in X$ 使得 $y$ 在 $x$ 之下，則 $x$ 為 $X$ 中的**極小** (minimal) 元素。
(b) 若 $x$ 在 $X$ 中所有的其它元素之下，則 $x$ 為 $X$ 中的**最小** (minimum) 元素。
(c) 若不存在 $y \in X$ 使得 $y$ 在 $x$ 之上，則 $x$ 為 $X$ 中的**極大** (maximal) 元素。
(d) 若 $x$ 在 $X$ 中所有的其它元素之上，則 $x$ 為 $X$ 中的**最大** (maximum)元素。

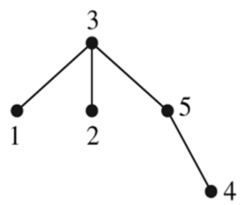
尋找部分有序關係中的

極小元素： 1,2,4

最小元素： 無

極大元素： 3

最大元素： 3




10

## 有序關係中的最佳元素 – 例子

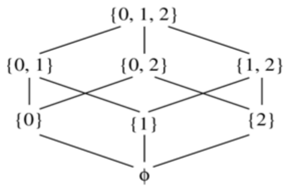
令 $U=\{0,1,2\}$, 則 $\subseteq$ 在 $U$ 的子集合上定義部分有序關係。

極小元素: $\phi$

最小元素: $\phi$

極大元素: $\{0,1,2\}$

最大元素: $\{0,1,2\}$




{0, 1, 2}的子集合

11

## 隨堂練習:1

令 $R=\{(x, y): x, y \in \mathbb{N}$ 且 $y \geq x$ 與 $y-x$ 為偶數$\}$

則 $R$ 為 $\mathbb{N}$ 上的一個部分排序。

12

# 隨堂練習:2

($a$) 將除數關係用於下列集合並繪圖顯示其關係。

($b$) 列出其所有的極大、最大、極小、與最小元素。

(1) {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}　　(2) {2,3,4,5,6,7,8,9,10}