3-3等價關係

等價關係

令 R 為一個集合 X 上的二元關係，若 R 具有反射性、對稱性與傳遞性，則 R 便是一個等價關係(equivalence relation)。

$Ex: X =$ {僑光科技大學資科系、應英系、與財法系的全體學生}

$R = \{(x, y) \mid x, y \in X$ 且 x, y 為同系學生$\}$

(1) 反射性： $\forall x \in X, (x, x) \in R$

(2) 對稱性： $\forall x, y \in X, (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

(3) 傳遞性： $\forall x, y, z \in X, (x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

$\Rightarrow R$ 為等價關係

等價類

令 ~ 為集合 X 上的一個等價關係，則對任何 $x \in X$，令 $[x]=\{y \in X \mid x \sim y\}$，便稱作 x 的等價類(equivalence class)。

$Ex: X=\{$僑光科技大學資料系、應英系、與財法系的全體學生$\}$

$R=\{(x,y) \mid x,y \in X$ 且 x,y 為同系學生$\}$

(1) $a \in X$, a 為資科系學生，則 $[a]=\{y \in X \mid y$ 為資科系學生$\}$

(2) $b \in X$, b 為應英系學生，則 $[b]=\{y \in X \mid y$ 為應英系學生$\}$

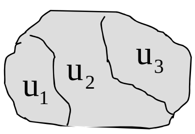
(3) $c \in X$, c 為財法系學生，則 $[c]=\{y \in X \mid y$ 為財法系學生$\}$

$\Rightarrow X$ 被等價關係 R 分割為 3 個等價類 : [a],[b],[c]

3

分割

$X=\{1,2,3,4,5\}$



$u_1=\{1\}$, $u_2=\{2,4\}$, $u_3=\{3,5\}$

$Y=\{u_1,u_2,u_3\}$

(1) $u_1 \subseteq X, u_2 \subseteq X, u_3 \subseteq X$

(2) $u_1 \cap u_2=\phi, u_1 \cap u_3=\phi, u_2 \cap u_3=\phi$

(3) $u_1 \cup u_2 \cup u_3 = X$

$\Rightarrow Y=\{u_1,u_2,u_3\}$ 為 X 的分割

令 X 為非空集合，且 Y 為 X 的非空子集合構成的集合，
設 $Y=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，則 Y 為 X 的一個分割(partition)若且唯若

(1) $u_i \subseteq X, i=1,2,\cdots,n$

(2) $u_i \cap u_j=\phi, \forall i,j=1,2,\cdots,n$ 且 $i \neq j$

(3) $u_1 \cup u_2 \cup \cdots \cup u_n = X$

4

分割

令 X 為非空集合，且 Y 為 X 的非空子集合構成的集合，

設 $Y=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，則 Y 為 X 的一個分割(partition)若且唯若

(1) $u_i \subseteq X$, $i=1,2,\cdots,n$

(2) $u_i \cap u_j=\phi, \forall i,j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j$

(3) $u_1 \cup u_2 \cup \cdots \cup u_n = X$

$Ex: X=\{$僑光科技大學資料系、應英系、與財法系的全體學生$\}$

$R=\{(x,y)\,|\,x,y\in X$ 且 x,y 為同系學生$\}$

$[a]=\{$資科系學生$\},[b]=\{$應英系學生$\},[c]=\{$財法系學生$\}$

$\Rightarrow$ 3 個等價類 [a],[b],[c] 滿足分割的條件(1),(2),(3)

$\Rightarrow Y=\{[a],[b],[c]\}$ 為 X 的分割

5

等價類與分割

令 ~ 為集合 X 上的一個等價關係，等價類 $[x]=\{y\in X\,|\,x\sim y\}$，則

(1) 對任何 $x\in X$，$x\in[x]$

(2) $\forall x,y\in X$，若非 $[x]=[y]$，則一定是 $[x]\cap[y]=\phi$

(3) $\{[x]\,|\,x\in X\}$ 為 X 上的一個的分割

(4) 對 $x,y\in X$，$x\sim y \Leftrightarrow y\in[x]$

$Ex: X=\{$僑光科技大學資料系、應英系、與財法系的全體學生$\}$

$R=\{(x,y)\,|\,x,y\in X$ 且 x,y 為同系學生$\}$

$[a]=\{$資科系學生$\},[b]=\{$應英系學生$\},[c]=\{$財法系學生$\}$

$\Rightarrow$ 3 個等價類 [a],[b],[c] 滿足分割的條件(1),(2),(3)

$\Rightarrow Y=\{[a],[b],[c]\}$ 為 X 的分割

6

等價類與分割 – 例子

$Ex: X = \{a,b,c,d,e\}$

$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(b,c),(c,b),(d,d),(d,e),(e,d),(e,e)\}$

(1) 反射性: $\forall x \in X, (x,x) \in R$

(2) 對稱性: $\forall x, y \in X, (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

(3) 傳遞性: $\forall x, y, z \in X, (x,y) \in R$ 且 $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$\Rightarrow R$ 為等價關係

$[a] = \{a\}; [b] = \{b,c\}; [c] = \{b,c\}; [d] = \{d,e\}; [e] = \{d,e\}$

$\Rightarrow Y = \{[a],[b],[c],[d],[e]\} = \{[a],[b],[d]\}$為 X 的一個分割

7

同餘關係

令 p 為正整數，且令 $x, y \in \mathbb{N}$，若 $(x-y)$ 可被 p 整除，意即若 $(x-y) = m \cdot p$，m 為整數的話，則我們說在**模** (modulo) 為 p 之下，x 與 y **同餘** (congruent)，記作 $x \equiv y (mod p)$。

設 $x \equiv y(mod\ p) \Rightarrow x - y = mp, m \in Z$

若 $x = np + r, n \in Z$，則 $y = x - mp = (np + r) - mp = (n - m)p + r$

$\Rightarrow x$ 與 y 同餘

8

同餘關係

令 p 為大於等於 0 的自然數，則 $\equiv(mod\,p)$ 為 $\mathbb{N}$ 上的一個等價關係。

解

驗證其滿足所有的特性：

反射性：對任何 $n\in\mathbb{N}$，$(n-n)=0=p\cdot 0$，所以 $(n-n)$ 被 p 整除。所以，$n\equiv n(mod\,p)$。

對稱性：若 $n\equiv m(mod\,p)$，則對某個 $k\in\mathbb{Z}$，$(n-m)=pk$。$(n-m)=p(-k)$，所以，$m\equiv n(mod\,p)$。

傳遞性：假定 $n\equiv m(mod\,p)$ 且 $m\equiv k(mod\,p)$，我們要顯示 $n\equiv k(mod\,p)$。由假設可推得對某個 $i,j\in\mathbb{Z}$，$(n-m)=ip$ 且 $(m-k)=jp$。$(n-k)=(n-m)+(m-k)=ip+jp=(i+j)p$，所以，$n\equiv k(mod\,p)$。

由於 $\equiv(mod\,p)$ 具備反射性、對稱性與傳遞性，所以是一個等價關係。

9

同餘關係

寫出等價關係 $\equiv(\text{mod}\,p)$ 的等價類 (設 $p=3$)

$[x]=\{y\in N\mid x\equiv y(\text{mod}\,3)\}=\{y\in N\mid y-x=3k,k\in Z\}$

$[0]=\{y\in N\mid 0\equiv y(\text{mod}\,3)\}=\{y\in N\mid y-0=3k,k\in Z\}=\{y\in N\mid y=3k,k\in Z\}$

$[1]=\{y\in N\mid 1\equiv y(\text{mod}\,3)\}=\{y\in N\mid y-1=3k,k\in Z\}=\{y\in N\mid y=3k+1,k\in Z\}$

$[2]=\{y\in N\mid 2\equiv y(\text{mod}\,3)\}=\{y\in N\mid y-2=3k,k\in Z\}=\{y\in N\mid y=3k+2,k\in Z\}$

$[3]=\{y\in N\mid 3\equiv y(\text{mod}\,3)\}=\{y\in N\mid y-3=3k,k\in Z\}=\{y\in N\mid y=3k+3,k\in Z\}$

$\vdots$

$\Rightarrow [0]=\{0,3,6,9,12,\cdots\}=[3]=[6]=[9]=\cdots$

$\Rightarrow [1]=\{1,4,7,10,13,\cdots\}=[4]=[7]=[10]=\cdots$

$\Rightarrow [2]=\{2,5,8,11,14,\cdots\}=[5]=[8]=[11]=\cdots$

$\Rightarrow Y=\{[0],[1],[2]\}$ 為 N 的一個分割。

10

等價關係與分割

設 A 為集合，則

(1) A 上的任一個等價關係 R 引出 A 的一個分割，且

(2) A 的任一個分割給出 A 上的一個等價關係 R。

設 $A=\{1,2,3,4,5\}$。$Y=\{\{1\},\{2,4\},\{3,5\}\}$ 為 A 的一個分割，

依此分割給出 A 上的一個等價關係 R。

$\{1\}\Rightarrow\{1\}\times\{1\}=\{(1,1)\}$

$\{2,4\}\Rightarrow\{2,4\}\times\{2,4\}=\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

$\{3,5\}\Rightarrow\{3,5\}\times\{3,5\}=\{(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$

$R=\{1\}\times\{1\}\cup\{2,4\}\times\{2,4\}\cup\{3,5\}\times\{3,5\}$

$\quad=\{(1,1),(2,2),(2,4),(4,2),(4,4),(3,3),(3,5),(5,3),(5,5)\}$

11

隨堂練習:1

證明等同關係 $Id_X=\{(x,y)\mid x,y\in X$ 且 $x=y\}$ 為等價關係

12

隨堂練習:2

在實數$\Re$上定義一個二元關係 $R=\{(x,y)\in\Re\times\Re \mid xy>0$ 或 $x=y=0\}$。
證明 R 為等價關係並寫出其等價類。

13

隨堂練習:3

寫出等價關係 $\equiv (\mathrm{mod}\,p)$ 的等價類 (設 $p=5$)

14

隨堂練習:4

設 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$。$Y=\{\{2\},\{4,6\},\{1,3,5\}\}$為 A 的一個分割，依此分割給出 A 上的一個等價關係 R。

15