

■ 3-2關係的特殊型態

1

■ 反射性

令 R 為一個集合 X 上的二元關係，若對每一個 $x \in X$ ，都有 $(x, x) \in R$ ，則 R 為具反射性(reflexive)。

一個集合 X 上的二元關係 R 具反射性 $\Leftrightarrow Id_X \subseteq R$

Ex: $X = \{1, 2, 3\}$

$Id_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \Rightarrow$ 具反射性

$Le_X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\} \Rightarrow$ 具反射性

$Lt_X = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \Rightarrow$ 不具反射性

2

對稱性

令 R 為一個集合 X 上的二元關係，若 $(x, y) \in R$ ，
都有 $(y, x) \in R$ ，則 R 為具對稱性(symmetric)。

一個集合 X 上的二元關係 R 具對稱性 $\Leftrightarrow R = R^{-1}$

Ex: $X = \{1, 2, 3\}$

$Id_X = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ \Rightarrow 具對稱性

$Le_X = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ \Rightarrow 不具對稱性

$R = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$ \Rightarrow 具對稱性

3

反對稱性

令 R 為一個集合 X 上的二元關係，若 $(x, y) \in R$ ，且 $x \neq y$
都有 $(y, x) \notin R$ ，則 R 為具反對稱性(antisymmetric)。

Ex: $X = \{1, 2, 3\}$

$Id_X = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ \Rightarrow 具反對稱性

$Le_X = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ \Rightarrow 具反對稱性

$R = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$ \Rightarrow 不具反對稱性

4

傳遞性

令 R 為一個集合 X 上的二元關係，若 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$ ，都有 $(x, z) \in R$ ，則 R 為具傳遞性(transitive)。

一個集合 X 上的二元關係 R 具對稱性 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

Ex: $X = \{1, 2, 3\}$

$Id_X = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ \Rightarrow 具傳遞性

$Le_X = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ \Rightarrow 具傳遞性

$R = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2)\}$ \Rightarrow 不具傳遞性

5

例子

關係	反射性	對稱性	反對稱性	傳遞性
Id_X	○	○	○	○
$<$	×	×	○	○
\leq	○	×	○	○
\cup	×	×	○	○
\cap	○	×	○	○

6

R的次方

令 R 為一個集合 X 上的二元關係，則對 $n \in \mathbb{N}$ ， R 的 n 次方 (nth power of R)，記作 R^n ，被定義如下：

$$(1) R^0 = Id_X \quad (2) R^{n+1} = R \circ R^n \quad (3) R^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \quad (4) R^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$$

$$Ex: X = \{a, b, c\}, R = \{(a, a), (a, c), (b, a), (c, b)\}$$

$$R^0 = Id_X = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$$R^1 = R \circ R^0 = R \circ Id_X = \{(a, a), (a, c), (b, a), (c, b)\}$$

$$R^2 = R \circ R = \{(a, a), (a, c), (a, b), (b, a), (b, c), (c, a)\}$$

$$R^3 = R \circ R^2 = \{(a, a), (a, c), (a, b), (b, a), (b, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$$

$$R^4 = R \circ R^3 = \{(a, a), (a, c), (a, b), (b, a), (b, c), (b, b), (c, a), (c, c), (c, b)\} = X \times X$$

$$R^5 = R \circ R^4 = R^4 = R^n, n \geq 4$$

$$R^+ = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^{\infty} = \{(a, a), (a, c), (a, b), (b, a), (b, c), (b, b), (c, a), (c, c), (c, b)\}$$

$$R^* = R^0 \cup R^1 \cup \dots \cup R^{\infty} = \{(a, a), (a, c), (a, b), (b, a), (b, c), (b, b), (c, a), (c, c), (c, b)\} \quad 7$$

反射閉集、對稱閉集

令 R 為一個集合 X 上的二元關係，則

(1) $R \cup Id_X$ 稱為反射閉集，意即包含 R 的最小反射關係

(2) $R \cup R^{-1}$ 稱為對稱閉集，意即包含 R 的最小對稱關係

$$Ex: X = \{a, b, c\}, R = \{(a, b), (b, c)\}$$

$$Id_X = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$$R^{-1} = \{(b, a), (c, b)\}$$

$$R \cup Id_X = \{(a, b), (b, c), (a, a), (b, b), (c, c)\} \Rightarrow \text{反射閉集}$$

$$R \cup R^{-1} = \{(a, b), (b, c), (b, a), (c, b)\} \Rightarrow \text{對稱閉集}$$

傳遞閉集、反射傳遞閉集

令 R 為一個集合 X 上的二元關係，則

(3) $R^+ = \cup_{i=1}^{\infty} R^i$ 稱為傳遞閉集，意即包含 R 的最小傳遞關係

(4) $R^* = \cup_{i=0}^{\infty} R^i$ 稱為反射傳遞閉集，意即包含 R 的最小反射傳遞關係

Ex: $X = \{a, b, c\}, R = \{(a, b), (b, c)\}$

$R^0 = Id_X = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

$R^1 = R \circ R^0 = R \circ Id_X = \{(a, b), (b, c)\}$

$R^2 = R \circ R = \{(a, c)\}$

$R^3 = R \circ R^2 = \{\} = \phi$

$R^4 = R \circ R^3 = \phi = R^n, n \geq 4$

$R^+ = R^1 \cup R^2 \cup \dots \cup R^{\infty} = \{(a, b), (b, c), (a, c)\} \Rightarrow$ 傳遞閉集

$R^* = R^0 \cup R^1 \cup \dots \cup R^{\infty} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\} \Rightarrow$ 反射傳遞閉集⁹

隨堂練習:1

關係	反射性	對稱性	反對稱性	傳遞性
x 與 y 同高				
x 與 y 同性別				
x 比 y 年紀大				
x 與 y 是兄弟				
x 是 y 的祖先				

隨堂練習:2

$$R_1 = \{(x, y) \mid x < y^2, x, y \text{ 為實數}\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \mid |x - y| < 0.05, x, y \text{ 為實數}\}$$

關係	反射性	對稱性	反對稱性	傳遞性
R_1				
R_2				

11

隨堂練習:3

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$

- (1) 找出 R 的反射閉集
- (2) 找出 R 的對稱閉集
- (3) 找出 R 的傳遞閉集
- (4) 找出 R 的反射傳遞閉集
- (5) 找出最小整數 m, n 使得 $R^m = R^n, 0 < m < n$

12