

第三章:關係

3-1 二元關係

3-2 關係的特殊型態

3-3 等價關係

3-4 有序關係

1

3-1 二元關係

2

關係的緣起

在一項競賽中，我們依選手成績高低來建立選手與名次之間的關係。假設參加競賽的選手有五位，分別用a,b,c,d,及e表示，並按所得成績之高低給與名次1,2,3,4,到第5名，若選手所得名次如下：

a 選手得第 2 名： $a \rightarrow 2$ 這就是從參賽者所成的集合
 b 選手得第 4 名： $b \rightarrow 4$ $A = \{a, b, c, d, e\}$ 到所得名次所成
 c 選手得第 1 名： $c \rightarrow 1$ 的集合 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的一種關係
 d 選手得第 5 名： $d \rightarrow 5$
 e 選手得第 3 名： $e \rightarrow 3$

3

關係的定義

一個較明確且簡便的表示法，我們可以用一個有序對 (x, y) 來表示 x 選手所得名次為 y 。因此，上述結果可以描述如下：

$(a, 2), (b, 4), (c, 1), (d, 5),$ 及 $(e, 3)$ 。

令 $R = \{(a, 2), (b, 4), (c, 1), (d, 5), (e, 3)\}$ 表示從集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 到集合 $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的一種關係。

R 為卡氏積 $A \times B$ 的部分集合，其中 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$

因此，對任一 $A \times B$ 之部分集合 S ，
我們通常稱 S 是從 A 到 B 的一個關係(relation)。

4

二元關係

令 X_1, X_2 為集合，則 $X_1 \times X_2$ 的部分集合即為一個二元關係 (binary relation)。若 $X_1 = X_2 = X$ ，則稱二元關係定義在 X 上。

令 $X_1 = \{a, b, c\}, X_2 = \{1\}$ ，則 $X_1 \times X_2 = \{(a,1), (b,1), (c,1)\}$

令 $R_1 = \{(a,1)\}$ $R_1 \subset X_1 \times X_2$ 為 $X_1 \times X_2$ 的一個二元關係

令 $R_2 = \{(1,a), (c,1)\}$ $R_2 \not\subset X_1 \times X_2$ 不為 $X_1 \times X_2$ 的一個二元關係

令 $R_3 = \{(a,1), (b,1), (c,1)\}$ $R_3 \subset X_1 \times X_2$ 為 $X_1 \times X_2$ 的一個二元關係

$R_3 = X_1 \times X_2$ 稱為全體關係 (universal relation)

令 $R_4 = \{ \}$ $R_4 \subset X_1 \times X_2$ 為 $X_1 \times X_2$ 的一個二元關係

$R_4 = \phi$ 為稱為空虛關係 (trivial relation)

5

等同關係

令 $X = \{a, b\}$ ，則 $X \times X = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$

令 $R_1 = \{(a,a)\}$ $R_1 \subset X \times X$ 為 $X \times X$ 的一個二元關係

令 $R_2 = \{(b,a), (c,b)\}$ $R_2 \not\subset X \times X$ 不為 $X \times X$ 的一個二元關係

令 $R_3 = \{(a,a), (b,b)\}$ $R_3 \subset X \times X$ 為 $X \times X$ 的一個二元關係

$R_3 = \{(x,x) | x \in X\}$ 稱為等同關係 (identity relation)

$Id_X = \{(x,y) | x, y \in X \text{ 且 } x = y\}$ 稱為等同關係 (identity relation)

6

二元關係 - 例子

對任何集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ ，令

$$Lt_X = \{(x, y) : x, y \in X \text{ and } x < y\}$$

$$Le_X = \{(x, y) : x, y \in X \text{ and } x \leq y\}$$

$$Gt_X = \{(x, y) : x, y \in X \text{ and } x > y\}$$

$$Ge_X = \{(x, y) : x, y \in X \text{ and } x \geq y\}$$

$$Ex : X = \{1, 2, 3\}$$

$$Lt_X = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

$$Le_X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

$$Gt_X = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$Ge_X = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$Id_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

Lt = Less than

Le = Less and equal to

Gt = Greater than

Ge = Greater and equal to

7

n元關係

令 X_1, X_2, \dots, X_n 為集合，則 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 的部分集合即為一個 n 元關係 (n -ray relation)。若 $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$ ，則稱 n 元關係定義在 X 上。

令 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， R 為定義在 A 上 3 元關係如下：

$(n_1, n_2, n_3) \in R \Leftrightarrow n_1 \times n_2 = n_3$ 。寫出 R 的元素。

$$R = \{(1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (1, 3, 3), (3, 1, 3),$$

$$(1, 4, 4), (4, 1, 4), (2, 2, 4), (1, 5, 5), (5, 1, 5)\}$$

8

倒反

令 R 為一個二元關係，則 R 的倒反(inverse) 記作 R^{-1} ，為

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

$$Ex: X = \{1, 2, 3\}$$

$$Le_X = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

$$Le_X^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 3)\}$$

$$Id_X = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$Id_X^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

9

複合

令 R 與 S 為 X 上的二元關係，則 R 與 S 的複合(composition) 記作 $R \circ S$ ，定義為

$$R \circ S = \{(x, y) \mid (x, z) \in S, (z, y) \in R, x, y, z \in X\}$$

$$Ex: X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$S = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (5, 3), (5, 4)\}$$

$$R \circ S = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (4, 2), (5, 4), (5, 5), (5, 2)\}$$

$$S \circ R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (5, 1)\}$$

10

定理

令 R, S 與 T 為 X 上的二元關係，則

$$(1) (R^{-1})^{-1} = R$$

$$(2) R \circ Id_X = Id_X \circ R = R$$

$$(3) (R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

11

隨堂練習:1

令 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ ， R 為定義在 A 上 2 元關係如下：

$(x, y) \in R \Leftrightarrow x = ky, k \in N$ 。寫出 R 的元素。

12

隨堂練習:2

找出以下每一個定義在實數 \mathbb{R} 上的關係的元素：

(1) $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 1$ (2) $(x, y) \in R \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$

13

隨堂練習:3

令 $U = \{0, 1\}$ ，則

(1) 子集關係 $R_1 = \{(X, Y) \mid X, Y \subseteq U \text{ 且 } X \subseteq Y\}$ 。列出 R_1 所有元素。

(2) 真子集關係 $R_2 = \{(X, Y) \mid X, Y \subset U \text{ 且 } X \subset Y\}$ 。列出 R_2 所有元素

14

隨堂練習:4

$$\text{Ex: } X = \{1,3,5\}$$

$$Le_x =$$

$$Le_x^{-1} =$$

$$Le_x \circ Le_x =$$

$$Le_x \circ Le_x^{-1} =$$

$$Le_x^{-1} \circ Le_x =$$