

2-4 述詞邏輯

1

命題邏輯與述詞邏輯

命題：

$$p: 2 < 3 \quad ; \quad q: 4 < 3$$

命題邏輯：

$$p \wedge q \quad ()$$

$$p \rightarrow q \quad ()$$

$$(p \vee \neg q) \leftrightarrow p \quad ()$$

$x < 3$ 命題？

原子語式：

$$p(x): \underbrace{x}_{\text{變數}} \leq \underbrace{3}_{\text{述詞}}$$

述詞邏輯：

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in N, \underbrace{x < 3}_{P(x)} \quad () \\ \text{宇宙性定量} \\ \text{(對所有的)} \\ \exists x \in N, \underbrace{x < 3}_{P(x)} \quad () \\ \text{存在性定量} \\ \text{(存在)} \end{array} \right.$$

2

述詞、原子語式

述詞(predicate): 一個事務間的關係或性質

Ex: $<$, $>$, \leq , \geq , $=$, $+$, $-$, \times , \div , \dots

原子語式(atomic formula): 一個對述詞描述的語式，沒有邏輯運算符號，只有變數與常數

Ex: (1) $P(x, y): "x + y = 0"$ 二元原子語式

(2) $Q(x, y, z): "z \geq x^2 y"$ 三元原子語式

(3) $M(x, y): "x \text{ 與 } y \text{ 結婚}"$ 二元原子語式

3

宇宙性定量

宇宙性定量: 記作 " \forall ", 讀作 "對所有的"

Ex:

$\forall x \in N, p(x)$ 讀作 "對所有的 x 屬於自然數, $p(x)$ "

意思是 "對所有的 x 屬於自然數, $p(x)$ 的結論為真"

Ex: 判斷下列述詞邏輯是否為真

$$(1) \forall x \in \{x \mid x > 0\}, \frac{|x|}{x} = 1 \quad (2) \forall x \in Z, \frac{|x|}{x} = 1$$

4

存在性定量

存在性定量：記作" \exists "，讀作"存在"

Ex :

$\exists x \in N, p(x)$ 讀作"存在 x 屬於自然數, $p(x)$ "

意思是"存在 x 屬於自然數, $p(x)$ 的結論為真"

Ex : 判斷下列述詞邏輯是否為真

$$(1) \exists x \in N, x^2 - 1 = 0 \quad (2) \exists x \in R, x^2 + 1 = 0$$

5

巢狀量詞-1

$$\exists x(\exists y(p(x, y))) \Leftrightarrow \exists x \exists y p(x, y) \stackrel{x, y \in U}{\Leftrightarrow} \exists x, y p(x, y)$$

$$\exists y(\exists x(p(x, y))) \Leftrightarrow \exists y \exists x p(x, y) \stackrel{x, y \in U}{\Leftrightarrow} \exists y, x p(x, y)$$

$$\Rightarrow \exists x, y, p(x, y) \Leftrightarrow \exists y, x, p(x, y) \quad (x, y \in U)$$

$$\forall x(\forall y(p(x, y))) \Leftrightarrow \forall x \forall y p(x, y) \stackrel{x, y \in U}{\Leftrightarrow} \forall x, y p(x, y)$$

$$\forall y(\forall x(p(x, y))) \Leftrightarrow \forall y \forall x p(x, y) \stackrel{x, y \in U}{\Leftrightarrow} \forall y, x p(x, y)$$

$$\Rightarrow \forall x, y, p(x, y) \Leftrightarrow \forall y, x, p(x, y) \quad (x, y \in U)$$

6

巢狀量詞-2

設 $p(x, y): x + y = 1 \quad (x, y \in Z)$

(1) $\exists x(\forall y(p(x, y)))$

(2) $\forall x(\exists y(p(x, y)))$

$\exists x(\forall y(p(x, y))) \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \forall x(\exists y(p(x, y)))$

7

巢狀量詞 - 例子

設 $p(x, y): x \cdot y = 0 \quad (x, y \in N)$

(1) $\exists x(\forall y(p(x, y)))$

(2) $\forall x(\exists y(p(x, y)))$

(3) $\forall x(\forall y(p(x, y)))$

(4) $\exists x(\exists y(p(x, y)))$

8

否定與定量

$$\neg(\exists x p(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg p(x)$$

$$\neg(\forall x p(x)) \Leftrightarrow \exists x \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x \forall y p(x, y)) \Leftrightarrow \forall x \exists y \neg p(x, y)$$

$$\neg(\forall x \exists y p(x, y)) \Leftrightarrow \exists x \forall y \neg p(x, y)$$

9

否定與定量 - 例子

找出下列各語式的否定一般式

$$(1) \forall x p(x) \rightarrow q(x)$$

$$\neg(\forall x p(x) \rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \neg(\forall x \neg p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \exists x p(x) \wedge \neg q(x)$$

$$(2) \forall x \exists y (p(x, y) = q(x)) \vee (p(x, y) = r(x))$$

$$\neg(\forall x \exists y (p(x, y) = q(x)) \vee (p(x, y) = r(y))) \Leftrightarrow \exists x \forall y (p(x, y) \neq q(x)) \wedge (p(x, y) \neq r(y))$$

10

單變數定量語式的邏輯關係

$$(1) \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$$

$$(2) \exists x (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x P(x)) \vee (\exists x Q(x))$$

$$(3) \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x))$$

$$(4) (\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$$

(1) " \Leftarrow " 不成立。例如 $P(x): x+1=0; Q(x): x-1=0$

(4) " \Leftarrow " 不成立。例如 $P(x): x \geq 1; Q(x): x < 1$

11

單變數定量語式 - 例子

令字集為 N ，以下那一個語式為真？

$$(1) \exists x (x \geq 3 \vee x < 3) \qquad (5) \exists x (x \geq 3 \wedge x < 3)$$

$$(2) \exists x x \geq 3 \vee \exists x x < 3 \qquad (6) \exists x x \geq 3 \wedge \exists x x < 3$$

$$(3) \forall x (x \geq 3 \vee x < 3) \qquad (7) \forall x (x \geq 3 \wedge x < 3)$$

$$(4) \forall x x \geq 3 \vee \forall x x < 3 \qquad (8) \forall x x \geq 3 \wedge \forall x x < 3$$

12

隨堂練習:1

設 $p(x, y): x \cdot y = 1 \quad (x, y \in N)$

(1) $\exists x(\forall y(p(x, y)))$

(2) $\forall x(\exists y(p(x, y)))$

(3) $\forall x(\forall y(p(x, y)))$

(4) $\exists x(\exists y(p(x, y)))$

13

隨堂練習:2

令字集為 N 。將下列句子翻譯成一個語式(運用量詞):

(1) 有一個最小的數

(2) 有一個最大的數

14

隨堂練習:2

令字集為 R 。將下列句子翻譯成一個語式(運用量詞):

(3) 沒有一個最大的數

(4) 每一個正數都有一個平方根

15

(2005 雲科大資訊所)

設 $p(x, y): y - x = y + x^2 \quad (x, y \in Z)$

(1) $p(0, 1)$

(2) $\forall y p(0, y)$

(3) $\exists y p(1, y)$

16

(2005 雲科大資訊所)

設 $p(x, y) : y - x = y + x^2 \quad (x, y \in Z)$

(4) $\forall x \exists y p(x, y)$

(5) $\exists y \forall x p(x, y)$