2-3 一般式

1

一般式－較易理解好處理的語式

語式 $\phi = (p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ 與

$\psi = (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$等價

甚麼註解使語式 ϕ 為真？

由語式 ϕ 不易直接看出，必須由真值表顯示真值

但由等價語式 ψ 易看出當下列註解時 ϕ 為真

(1) p, q 為 T

(2) p, r 為 T 且 q 為 F

(3) p, q 為 F

2

DNF – 離接一般式

DNF (Disjunctive Normal Form)：

命題邏輯的語式 ϕ 如下所示

$$\phi = c_1 \vee c_2 \vee \cdots \vee c_k, \qquad c_i = p_{i1} \wedge p_{i2} \wedge \cdots$$

其中 $p_{i1}, p_{i2}, \cdots$ 為命題字母，稱為字(literal)

c_i 稱為項(term)且每一項中的字以"$\wedge$"連接

例如 $\phi = \overbrace{(\underbrace{p}_{字} \wedge \underbrace{q}_{字})}^{項} \vee \overbrace{(p \wedge \neg q \wedge r)}^{項} \vee \overbrace{(\neg p \wedge \neg q)}^{項}$

3

系統性建構等價的DNF – 例1

建構與 $\phi = (\neg(p \to q)) \to (q \wedge \neg r)$ 等價的 *DNF*

註解	p	q	r	相配項	ϕ	ψ
I_0	T	T	T	$p \wedge q \wedge r$	T	T
I_1	T	T	F	$p \wedge q \wedge \neg r$	T	T
I_2	T	F	T	$p \wedge \neg q \wedge r$	F	F
I_3	T	F	F	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	F	F
I_4	F	T	T	$\neg p \wedge q \wedge r$	T	T
I_5	F	T	F	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	T	T
I_6	F	F	T	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	T	T
I_7	F	F	F	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	T	T

建構

$$\begin{aligned}\psi = &(p \wedge q \wedge r) \\ \vee &(p \wedge q \wedge \neg r) \\ \vee &(\neg p \wedge q \wedge r) \\ \vee &(\neg p \wedge q \wedge \neg r) \\ \vee &(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\ \vee &(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r),\end{aligned}$$

則 ψ 與 ϕ 等價且為 *DNF*

4

系統性建構等價的DNF – 例2

建構與 $\phi = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ 等價的 DNF

註解	p	q	r	相配項	ϕ	ψ
I_0	T	T	T			
I_1	T	T	F			
I_2	T	F	T			
I_3	T	F	F			
I_4	F	T	T			
I_5	F	T	F			
I_6	F	F	T			
I_7	F	F	F			

5

CNF – 連結一般式

CNF (Conjunctive Normal Form)：

命題邏輯的語式 ϕ 如下所示

$$\phi = c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_k, \qquad c_i = p_{i1} \vee p_{i2} \vee \cdots$$

其中 $p_{i1}, p_{i2}, \cdots$ 為命題字母，稱為字(literal)

c_i 稱為子句(clause)且每一子句中的字以"∨"連接

例如 $\phi = \overbrace{(\underbrace{p}_{字} \vee \underbrace{q}_{字})}^{子句} \wedge \overbrace{(p \vee \neg q \vee \neg r)}^{子句} \wedge \overbrace{(\neg p \vee q)}^{子句}$

6

系統性建構等價的CNF – 例1

建構與 $\phi = (\neg(p \to q)) \to (q \wedge \neg r)$ 等價的 CNF

註解	p	q	r	相配項	ϕ	$\neg\phi$	ψ
I_0	T	T	T	$p \wedge q \wedge r$	T	F	T
I_1	T	T	F	$p \wedge q \wedge \neg r$	T	F	T
I_2	T	F	T	$p \wedge \neg q \wedge r$	F	T	F
I_3	T	F	F	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	F	T	F
I_4	F	T	T	$\neg p \wedge q \wedge r$	T	F	T
I_5	F	T	F	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	T	F	T
I_6	F	F	T	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	T	F	T
I_7	F	F	F	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	T	F	T

建構與$\neg\phi$等價之DNF

$\psi_\phi = (p \wedge \neg q \wedge r)$
$\vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r),$

令$\psi = \neg\psi_\phi$
$= (\neg p \vee q \vee \neg r)$
$\wedge (\neg p \vee q \vee r),$

則ψ與ϕ等價且為CNF

7

系統性建構等價的CNF – 例2

建構與 $\phi = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ 等價的 CNF

註解	p	q	r	相配項	ϕ	$\neg\phi$	ψ
I_0	T	T	T				
I_1	T	T	F				
I_2	T	F	T				
I_3	T	F	F				
I_4	F	T	T				
I_5	F	T	F				
I_6	F	F	T				
I_7	F	F	F				

8

判別DNF,CNF語式的真值

判別下列語式是否為恆真語式

(1) $\phi = (a \vee \neg b \vee b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c \vee c) \wedge (\neg a \vee a)$

(2) $\phi = (\neg a \wedge \neg b \wedge b) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge c) \vee (\neg a \wedge a)$

9

隨堂練習:1

建構與 $\phi = (p \to q) \to (p \wedge \neg r)$ 等價的 DNF

10

隨堂練習:2

建構與 $\phi = (p \to q) \to (p \wedge \neg r)$ 等價的 CNF

11

隨堂練習:3

判別下列語式是否為恆真語式

(1) $\phi = (a \vee \neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee a \vee c)$

(2) $\phi = (\neg a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge c) \vee (\neg a \wedge a)$

12