

## 2-2 邏輯真值

1

### 真值表

「否定」的真值表

$\neg$ 的真值	
$p$	$\neg p$
$T$	$F$
$F$	$T$

邏輯連結符號的真值表

$\wedge$ 的真值			$\vee$ 的真值		
$p$	$q$	$p \wedge q$	$p$	$q$	$p \vee q$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$T$
$F$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$F$	$F$	$F$	$F$	$F$	$F$

  

$\rightarrow$ 的真值			$\leftrightarrow$ 的真值		
$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$	$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$T$	$F$	$F$	$T$

2

## 命題真偽 – 例子

令命題  $p$  為  $T$ 、 $q$  為  $F$ 、 $r$  為  $T$ 。

寫出下列語式的真值：

(1)  $p \vee q$

(2)  $q \wedge \neg r$

(3)  $r \rightarrow q$

(4)  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

(5)  $(p \leftrightarrow q) \vee \neg r$

3

## 註解

令  $P$  為命題字母的集合，一個註解  $I$  一個對  $P$  中所有命題字母的指定。即對於  $r \in P$ ， $I(r)$  即  $r$  被指定的真值。

註解	$p$	$q$
$I_0$	$T$	$T$
$I_1$	$T$	$T$
$I_2$	$T$	$F$
$I_3$	$T$	$F$

命題  $p$ 、 $q$  有4個註解

註解	$p$	$q$	$r$
$I_0$	$T$	$T$	$T$
$I_1$	$T$	$T$	$F$
$I_2$	$T$	$F$	$T$
$I_3$	$T$	$F$	$F$
$I_4$	$F$	$T$	$T$
$I_5$	$F$	$T$	$F$
$I_6$	$F$	$F$	$T$
$I_7$	$F$	$F$	$F$

命題  $p$ 、 $q$ 、 $r$  有8個註解

4

## 註解 - 例子

令  $\phi = (\neg p \wedge q) \rightarrow p$ , 算出所有註解  $I$  中的  $I(\phi)$

註解	$p$	$q$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\phi$
$I_0$	$T$	$T$			
$I_1$	$T$	$F$			
$I_2$	$F$	$T$			
$I_3$	$F$	$F$			

5

## 恆真語式

令  $\phi = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ , 算出所有註解  $I$  中的  $I(\phi)$

註解	$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\phi$
$I_0$	$T$	$T$				
$I_1$	$T$	$F$				
$I_2$	$F$	$T$				
$I_3$	$F$	$F$				

若  $\phi$  在所有註解中皆為  $T$ , 則  $\phi$  被稱為恆真語式 (tautology) 或是邏輯上的真 (logical valid)

6

## 矛盾語式

令  $\phi = ((p \wedge q) \vee q) \leftrightarrow \neg q$ ，算出所有註解  $I$  中的  $I(\phi)$

註解	$p$	$q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee q$	$\neg q$	$\phi$
$I_0$	$T$	$T$				
$I_1$	$T$	$F$				
$I_2$	$F$	$T$				
$I_3$	$F$	$F$				

若  $\phi$  在所有註解中皆為  $F$ ，則  $\phi$  被稱為矛盾 (contradictions) 或是不具可滿足性 (unsatisfiable)

7

## 具可滿足性的語式

令  $\phi = (p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q)$ ，算出所有註解  $I$  中的  $I(\phi)$

註解	$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\phi$
$I_0$	$T$	$T$			
$I_1$	$T$	$F$			
$I_2$	$F$	$T$			
$I_3$	$F$	$F$			

若  $\phi$  在某個註解中為  $T$ ，則  $\phi$  被稱為具可滿足性 (satisfiable)

8

## 邏輯等價

用真值表顯示  $\phi = \neg(p \wedge q)$  與  $\psi = \neg p \vee \neg q$  的真值

註解	$p$	$q$	$p \wedge q$	$\phi = \neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\psi = \neg p \vee \neg q$
$I_0$	$T$	$T$					
$I_1$	$T$	$F$					
$I_2$	$F$	$T$					
$I_3$	$F$	$F$					

若對每一個註解  $I$ ,  $I(\phi) = I(\psi)$ , 則語式  $\phi$  與  $\psi$  為邏輯等價(logically equivalent)或等價(equivalent)

9

## 常用邏輯等價

- (1)  $p \wedge p$  ,  $p$
- (2)  $p \vee p$  ,  $p$
- (3)  $\neg(\neg p)$  ,  $p$
- (4)  $\neg(p \wedge q)$  ,  $\neg p \vee \neg q$
- (5)  $\neg(p \vee q)$  ,  $\neg p \wedge \neg q$
- (6)  $p \rightarrow q$  ,  $\neg p \vee q$  ,  $\neg q \rightarrow \neg p$
- (7)  $p \leftrightarrow q$  ,  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

10

## 等價的代換定理

若  $\phi_1$  與  $\phi_2$  邏輯等價，且令  $\psi$  為包含  $\phi_1$  的語式。  
若將  $\psi$  中所有的  $\phi_1$  皆替換成  $\phi_2$ ，得到一個新的語式  $\psi'$ ，則  $\psi$  與  $\psi'$  邏輯等價。

若  $\phi_1 = p \rightarrow q$  與  $\phi_2 = \neg p \vee q$ ，則  $\phi_1$  與  $\phi_2$  為邏輯等價，  
設  $\psi = (p \rightarrow q) \vee p$  為包含  $\phi_1$  的語式。

若將  $\psi$  中所有的  $\phi_1$  皆替換成  $\phi_2$ ，得到一個新的語式  $\psi' = (\neg p \vee q) \vee p$ ，則  $\psi$  與  $\psi'$  邏輯等價。

11

## 簡化語式 – 例子1

簡化下列語式為只有  $\neg$ 、 $\wedge$ 、與  $\vee$  三個邏輯運算符號

$$(1) \neg(\neg(p \wedge \neg q) \vee (q \rightarrow p))$$

12

## 簡化語式 – 例子2

簡化下列語式為只有  $\neg$ 、 $\wedge$ 、與  $\vee$  三個邏輯運算符號

$$(2) \neg(\neg p \leftrightarrow q)$$

13

## 隨堂練習:1

用真值表顯示  $\phi = (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$  為恆真語式

註解	$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\phi$
$I_0$	$T$	$T$					
$I_1$	$T$	$F$					
$I_2$	$F$	$T$					
$I_3$	$F$	$F$					

14

## 隨堂練習:2

用真值表顯示  $\phi = (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$  為恆真語式

註解	$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$\phi$
$I_0$	$T$	$T$					
$I_1$	$T$	$F$					
$I_2$	$F$	$T$					
$I_3$	$F$	$F$					

15

## 隨堂練習:3

寫出下列語式  $\phi = (p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \vee \neg r)$  真值表

註解	$p$	$q$	$r$	$p \leftrightarrow q$	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$\phi$
$I_0$	$T$	$T$	$T$				
$I_1$	$T$	$T$	$F$				
$I_2$	$T$	$F$	$T$				
$I_3$	$T$	$F$	$F$				
$I_4$	$F$	$T$	$T$				
$I_5$	$F$	$T$	$F$				
$I_6$	$F$	$F$	$T$				
$I_7$	$F$	$F$	$F$				

16



## 隨堂練習:4

「好的食物不便宜」和「便宜的食物不好」是否等價？

17

## 隨堂練習:5

「喝酒不開車」和「開車不喝酒」是否等價？

18

## 隨堂練習:6

簡化下列語式為只有  $\neg$ 、 $\wedge$  與  $\vee$  三個邏輯運算符號

(1)  $(p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow T$

(2)  $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow T$