1-4:數學歸納法

1

數學歸納法

令 f(n) 為一數學敘述，$n, n_0 \in N$ 且 $n \ge n_0$

(1) 基本步驟：若 $n = n_0$ 時, $f(n_0)$ 為真, 且

(2) 歸納步驟：設當 $n = k$ 時, f(k) 為真，

則當 $n = k+1$ 時, $f(k+1)$ 亦為真，對任意的 $k \in N$，$k \ge n_0$ 皆成立

由(1)(2)，則 f(n) 為真, 對所有的 $n, n_0 \in N$ 且 $n \ge n_0$

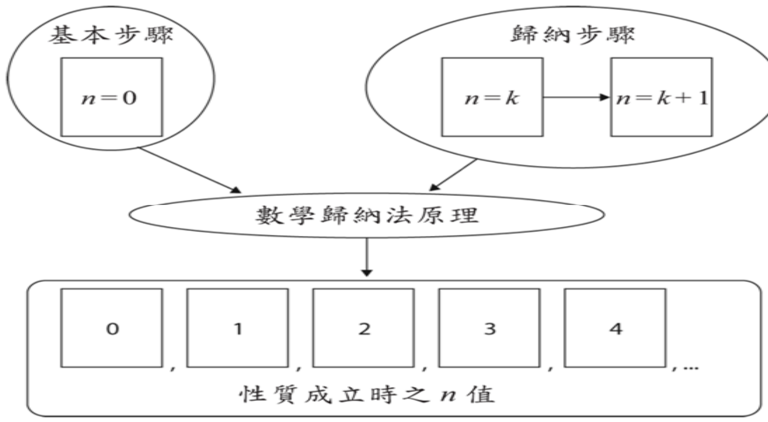
$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ n \ge 1}$$

$$\boxed{n! > n^2,\ n \ge 4}$$

2

數學歸納法－解說圖

一個歸納法證明的相關過程



3

數學歸納法－例題一

試證 $0+1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$n\in N$。

欲證 $0+1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 為真，$n\in N$，須驗證

(1) 基本步驟： 當$n=0$時, $0=\dfrac{0(0+1)}{2}$ 為真

(2) 歸納步驟： 設$n=k$時, 假設$0+1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ 為真

4

數學歸納法－例題一

欲證 $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 為真，$n\in N$，須驗證

(1) 基本步驟：當 $n=0$ 時, $0=\frac{0(0+1)}{2}$ 為真

(2) 歸納步驟：設 $n=k$ 時, 假設 $0+1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ 為真

，則當 $n=k+1$ 時, $0+1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$

$=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ 為真

由(1),(2)及數學歸納法知 $0+1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 為真，$\forall n\in N$

5

數學歸納法－例題二

試證 $n+1<n^2$，$n\in N$，$n\geq 2$。

欲證 $n+1<n^2$ 為真，$n\in N$，$n_0=2$, 須驗證

(1) 當 $n=2$ 時, $2+1<2^2$ 為真

(2) 設 $n=k$ 時, 假設 $k+1<k^2$ 為真，則

當 $n=k+1$ 時, $(k+1)+1<k^2+1<k^2+2k+1=(k+1)^2$ 為真

由(1),(2)及數學歸納法知 $n+1<n^2$ 為真，$\forall n\in N$，$n\geq 2$

6

數學歸納法 – 例題三

試證 $n! > n^2$ 為真，$n \in N$，$n \geq 4$。

欲證 $n! > n^2$ 為真，$n \in N$，$n \geq 4$，須驗證

(1) 基本步驟：

(2) 歸納步驟：

7

數學歸納法 – 例題四

試證 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 為真，$n \in N$，$n \geq 1$。

欲證此數學敘述為真，須驗證

(1) 基本步驟：

(2) 歸納步驟：

8

隨堂練習:1

試證 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$ 為真，$n\in N$，$n\geq 1$。

欲證此數學敘述為真，須驗證

(1) 基本步驟：

(2) 歸納步驟：

9

隨堂練習:2

試證 $(2n+1)^2-1$ 為 8 倍數，$n\in N$，$n\geq 1$。

欲證此數學敘述為真，須驗證

(1) 基本步驟：

(2) 歸納步驟：

10